

3

Vorlesung Bionik I im Winter 00/01 - Ingo Rechenberg, TU Berlin

Evolutionistische Bionik auf dem mathematischen Prüfstand

Geheimnis der Wirksamkeit der Evolutionsstrategie

Die Summe der evolutionsstrategisch gelösten Optimierungsaufgaben, 15 an der Zahl, soll den Leser aufmerken lassen: Die Methode der Evolution ist besser als ihr Ruf. Gemeinhin wird der Optimierungstheoretiker Evolution mehr als verschwenderisches Zufallsspiel denn als raffinierte Optimierungsmethodik deuten. Es gilt das Paradoxon zu verstehen. Denn ein Unbehagen bleibt, solange man nicht zu deuten vermag, weshalb ein vermeintliches Pröbelverfahren mit ausgeklügelten mathematische Strategien überhaupt konkurrieren kann.

Aufgabe ist es, ein theoretisches Modell des evolutionsstrategischen Optimierens zu entwickeln. Das wird gelingen, wenn wir die Grenzen der evolutionsstrategischen Lösungsfindung ausloten. Deshalb soll mit dem Magischen Quadrat noch nicht das Ende der (scheinbaren) Kompliziertheit eines mathematisch abstrakten Problems erreicht sein. Wir gehen noch eine Komplexitätsstufe höher.

FERMAT's letzter Satz und EULER's Vermutung

Gesucht ist die Lösung der folgenden Gleichung, wenn x_1 bis x_6 natürliche Zahlen darstellen:

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 = x_6^6.$$

In Worten: Die Summe von fünf natürlichen, zur sechsten Potenz erhobene Zahlen soll eine sechste zur sechsten Potenz erhobene ganze Zahl ergeben.

So wenig praktischen Sinn diese Aufgabe auch hat. Wer das obige Problem löst findet sich in den Annalen der Mathematik wieder.

Es war PIERRE DE FERMAT, der behauptet hat, bewiesen zu haben, dass eine Gleichung der Form $x^n + y^n = z^n$ keine Lösung besitzt, wenn x , y und z natürliche Zahlen darstellen und die ganze Zahl $n > 2$ ist. (Wirklich bewiesen wurde der FERMATSchen Satz erst 1997 durch ANDREW WILES). LEONHARD EULER hat die FERMATSche Vermutung erweitert und behauptet, dass auch die folgenden Gleichungen keine Lösungen besäßen:

$$\begin{aligned}x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 &= x_4^4 \\x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 &= x_5^5 \\x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 &= x_6^6 \\&\dots\dots\end{aligned} \quad x_j = \text{natürliche Zahlen}$$

Doch EULER hat sich geirrt: Im Jahre 1988 zeigt R. FRYE (unter Verwendung mehrerer Parallelrechner), dass für die Potenz vier die Gleichung existiert:

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Und schon 1966 wurde von L. J. LANDER und T. R. PARKIN die Gleichung entdeckt:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

Kann auch die Summe von fünf sechsten Potenzen wieder eine sechste Potenz sein? Das ist ein noch ungelöstes Problem in der Zahlentheorie. Der Evolutionsstrategie könnte die Aufgabe so formulieren:

$$Q = |x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 - x_6^6| \rightarrow \text{Min}.$$

Ich habe es versucht und bin noch nicht fündig geworden. Die bisher beste evolutionsstrategisch gefundene Lösung lautet:

$$65^6 + 164^6 + 417^6 + 817^6 + 1305^6 = (1318,0000000001259\dots)^6.$$

Für die Potenz fünf konnte die schon bekannte Lösung von LANDER und PARKIN zwar mehrmals exakt mit der Evolutionsstrategie gefunden werden. Die Versuchszahl lag dabei aber lediglich um eine 10er Potenz niedriger als bei einer blinden Zufallssuche zu erwarten gewesen wäre.

Bergsteigen - Gleichnis der Evolution

Der große Naturforscher HERMANN VON HELMHOLTZ hat einst sinngemäß gesagt: „Einen *Naturvorgang verstehen heißt, ihn in die Mechanik zu übersetzen*“. Das ist den Worten getreu so geschehen, wenn an der Zickzackplatte, dem Rohrkrümmer und der Zweiphasendüse künstliche Evolution betrieben wurde. Was wurde nun besser verstanden?

Evolutionsstrategische Lösungsfindung ist keine blinde Zufallssuche. DARWIN hat richtig gesehen: Damit Evolution funktioniert müssen aufeinanderfolgende kleine Mutationen konstruiert werden können, die kontinuierlich vom Schlechten über das Mittelmäßige zum Besten führen. Ein evolvierbares System darf sich nicht chaotisch verhalten. Ein evolvierbares System muss (mindestens stückweise) der **starken** Kausalitätsformel genügen: *Kleine Ursachenänderungen liefern kleine Wirkungsänderungen*. Zum Glück ist starke Kausalität ein Normverhalten der Welt. Wer sich eine Tasse Kaffee einschenkt baut auf starke Kausalität: Die Kanne etwas mehr geneigt, und der Kaffee fließt etwas stärker. Die evolutionsanalogen Experimente funktionierten, weil, von der „klassischen Gelenkplatte“ bis hin zum „größten kleinen Dekagon“, dieses Normverhalten galt. Starke Kausalität schafft Gipfel, die mit kleinen Schritten à la DARWIN bestiegen werden können.

Graduelle Evolvierbarkeit ist bei der EULERSchen Vermutung nur bedingt gegeben. Gerade das macht diese Aufgabe aber besonders biologienah. Denn in der Formulierung $|x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 - x_6^6| \rightarrow \text{Min}$ gibt es sehr viele relativ gute Lösungen, die alle graduell beklettert werden können. Zwar spannen die ganzzahligen Potenzformen (diophantische Gleichungen) ein chaotisches Basisgebirge auf. Dieses wird jedoch stückweise durch kausale Gipfelordnungen überlagert. Tatsache ist, dass biologische Evolution in einer ziggipfeligen Optimierungslandschaft stattfindet. Jede Art betätigt sich an einem Berg, und die Zahl der Arten auf unserem Planeten wird auf 15 Millionen geschätzt (erst 1,75 Millionen sind bekannt). Katastrophen sorgen dafür, dass laufend neue Berge angeschnitten werden. Das Problem wiederholt sich damit aber nur, nämlich möglichst effektiv einen Berg zu besteigen. Was sagt die Theorie zur Wirksamkeit des biologischen Bergkletterns?

Lineare Theorie des stark kausalen Kletterns

Starke Kausalität – wenigstens stückweise – ist ein Normverhalten der Welt. Die Evolutionsstrategie und andere Optimierungsverfahren bauen auf diese Ordnung. Ein Berg ist sichtbar gemachte starke Kausalität in zwei Dimensionen: Eine kleine Positionsänderung führt zu einer kleinen Höhenänderung.

Gegeben sei das Höhenlinienbild eines Berges (**Bild 3-1**). Wir wollen uns vorstellen, dass sich dieser Berg am Grunde eines trüben Sees befindet. Wie gelangt ein Ruderboot zielstrebig zur Stelle der höchsten Erhebung? Angenommen, der Ruderer besitzt drei gleich lange Stangen, die bis zum Seegrund reichen. Er rammt die erste Stange am momentanen Aufenthaltsort P_0 in den Boden. Dann rudert er eine kleine Strecke nach Norden (y -Richtung) und rammt die zweite Stange ein. Er rudert zurück und von dort ein kleines Stückchen nach Osten (x -Richtung), wo er die dritte Stange in den Seegrund stößt. Wäre unserer Ruderer im Besitz einer großen runden Holzscheibe, könnte er diese auf die herausragenden Enden der drei Stangen auflegen, und er sähe an der Neigung der Scheibe, in welcher Richtung der Seeuntergrund am steilsten ansteigt. Er würde ein Stückchen in diese Richtung rudern und die Prozedur wiederholen.

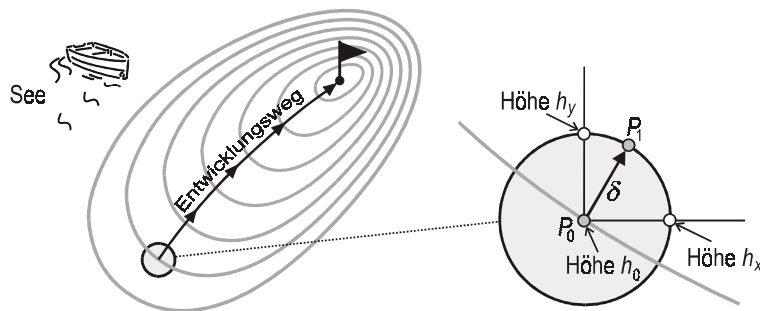


Bild 3-1:
*Elementare
Gradienten-
operation.*

Dieses sogenannte Gradientenverfahren funktioniert nur einwandfrei, wenn die Mess-Ruderstrecken in x - und y -Richtung sowie die Arbeitsruderstrecke von P_0 nach P_1 so klein sind, dass sich der darunter befindliche Bergbereich noch nicht augenfällig wölbt. Der Ruderer kann dann die Koordinaten seines neuen Punktes P_1 auch berechnen:

$$x_1 = x_0 + \delta \frac{h_x - h_0}{\sqrt{(h_x - h_0)^2 + (h_y - h_0)^2}}, \quad y_1 = y_0 + \delta \frac{h_y - h_0}{\sqrt{(h_x - h_0)^2 + (h_y - h_0)^2}}.$$

Es bedeuten h_0 , h_x und h_y die Höhen, die die Stäbe an den Positionen P_0 , P_x und P_y aus der Wasseroberfläche herausragen. Und δ ist die maximale Distanz, bis zu der sich der Berg quasi linear verhält. Wir bilden den Quotienten Weggewinn/Aufwand:

$$\varphi = \frac{\text{Weggewinn in Richtung des steilsten Anstiegs}}{\text{Zahl der Lotungen}}.$$

Die Funktionslotungen kosten Zeit. Deshalb nenne ich φ die Fortschrittsgeschwindigkeit. Bei zwei Variablen müssen wir dreimal loten, um den Weg δ in Richtung des steilsten Anstiegs zurückzulegen. Im n -dimensionalen Fall benötigen wir $n+1$ Messungen, um uns die Strecke δ näher an das Optimum heranzuarbeiten. In Fortschrittsgeschwindigkeiten ausgedrückt gilt:

$$\varphi_{\text{grad}}^{(2)} = \frac{1}{3} \delta, \quad \varphi_{\text{grad}}^{(n)} = \frac{1}{n+1} \delta.$$

Gradientenklettern ist eine elementare mathematische Idee. Ziel ist es, mittels der φ -Werte die Gradientenstrategie (ausgeklügeltes Handeln) mit der Evolutionsstrategie (zufälliges Handeln) zu vergleichen.

Unser Bootsmann rudere diesmal in eine zufällige Richtung (**Bild 3-3**). Am Rand des Testkreises δ angekommen wird die Tiefe des Sees ausgelotet. Ist diese größer als am Ausgangsort P_E (Elternposition), wird zurückgerudert und eine neue Richtung erwürfelt. Wenn aber $h_N > h_E$ ist, wird P_N zur neuen Elternposition P_E .

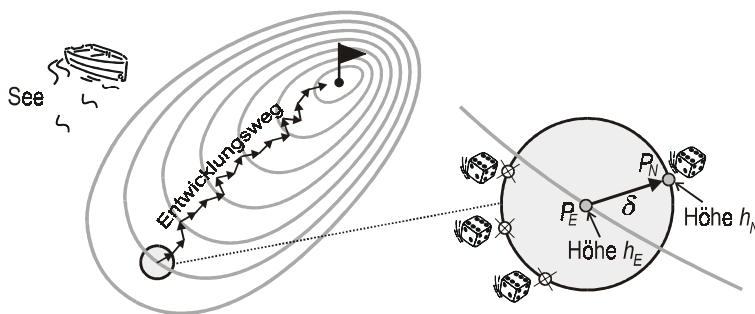


Bild 3-3:
Elementare
ES-Zufalls-
operation.

Wir notieren die zwei Formeln:

$$O_{\text{Kugel}}^{(n)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Die Formel für die Oberfläche einer n -dimensionalen Kugel wurde bereits in die n -dimensionale Fortschrittsformel eingeführt. Und mittels des Limes-Ausdrucks (er gilt praktisch für $n > 10$) können wir die Fortschrittsformel für große n in die einfachere Form bringen:

$$\varphi_{\text{evol}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Gradientenstrategie kontra Evolutionsstrategie

Wir schreiben die Ergebnisse der linearen Klettertheorie nebeneinander. Der Vergleich überrascht:

$$\begin{array}{ll} \text{Für } n = 2: & \varphi_{\text{grad}}^{(2)} = \frac{1}{3} \delta \quad \text{und} \quad \varphi_{\text{evol}}^{(2)} = \frac{1}{\pi} \delta. \\ \text{Für } n \text{ groß:} & \varphi_{\text{grad}}^{(n)} = \frac{1}{n} \delta \quad \text{und} \quad \varphi_{\text{evol}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta}{\sqrt{n}}. \end{array}$$

Erwartet hätte ich, dass ausgeklügeltes Loten stets zu schnellerem Fortschritt führt. Das stimmt zwar für 2 Dimensionen. Hier gilt

$$\varphi_{\text{grad}}^{(2)} = \frac{\pi}{3} \varphi_{\text{evol}}^{(2)}.$$

In Prozenten ausgedrückt: Die ausgeklügelte Gradientenoperation ist 4,7% schneller als die Zufallslotung. Für große Variablenzahlen n dreht sich die Tendenz drastisch um:

$$\varphi_{\text{grad}}^{(n)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \varphi_{\text{evol}}^{(n)} \quad n > 10.$$

Für $n=100$ ist die Zufallslotung bereits um den Faktor 4 schneller als die Gradientenstrategie. Und für $n=1000$ gilt gar $\varphi_{\text{evol}} = 12,6 \cdot \varphi_{\text{grad}}$.

Es zeigt sich, dass eine planvoll durchdachte Handlungsfolge nicht notwendigerweise effektiver sein muss als eine Reihe spontan ausgeführter Zufallsschritte. Man muss den Gesamtaufwand sehen. Die Gradientenstrategie benötigt n Vorversuche, die zunächst noch keinen Fortschritt erbringen. Erst nach dem Sammeln dieser Informationen folgt der Arbeitsschritt, der allerdings den größtmöglichen Gewinn garantiert. Bei der Evolutionsstrategie ist es gerade umgekehrt. Die Chance für einen großen Gewinn ist bei einem Zufallsschritt gering. Ein kleiner Gewinn tritt aber im Mittel jedes 2. Mal auf. Auf einen Satz gebracht: Die vielen Hilfsoperationen bei einer deterministischen Strategie können zu einer stärkeren Verlangsamung des erstrebten optimalen Fortschritts führen als die unvermeidbaren Abweichungen jedes 2. Zufallsschrittes von der optimalen Fortschrittsrichtung.

Der mathematisch-evolutionäre Beleg der Bionik

Die Bionik baut auf das perfekte Funktionieren der biologischen Evolution. Die Idee der Bionik wäre nichts wert, würde die Evolution ineffektiv herumprübeln. Die lineare Klettertheorie (**Bild 3-5**) zeigt: Die Evolutionsmethode kann bereits in ihrer einfachsten Imitationsstufe mit einer ausgeklügelten Optimierungsstrategie mithalten.

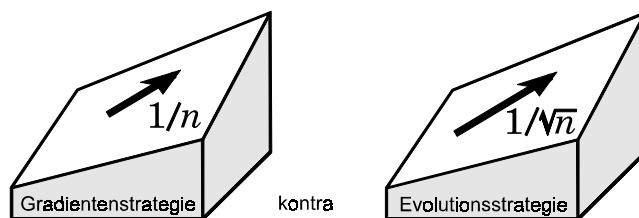


Bild 3-5:

Klettern am linearen Berg.

Ich sage vorsichtig „mithalten“. Denn der Optimierungstheoretiker wird bessere Strategien ins Feld führen, wenn es gilt, die Evolutionsmethode zu schlagen. Aber auch die Evolution arbeitet raffinierter als die $(1 + 1)$ -gliedrige Abstraktion. Evolutionsstrategien bauen auf die These auf, dass sich der biologische Evolutionsmechanismus selbst optimiert hat und so eine beste Optimierungsmethodik für stark kausales

Weltverhalten darstellt. Genmutation, Chromosomen-Rekombination, Isolation und Selektion bilden die Grundregeln einer „höheren“ Evolutionsstrategie. Phänomene der Population, Art und Gattung führen zu geschachtelten Evolutionsstrategien, die sich am Problem selbst verbessern. Schließlich muss der Vergleich „Kalkül kontra Evolution“ über den linearen Berg hinaus geführt werden. Alles dies ist Gegenstand der Theorie der Evolutionsstrategie. Das Ergebnis der genaueren Gegenüberstellung ist: Die Aussage der linearen Theorie muss nicht korrigiert werden. Es möge aus didaktischen Gründen erlaubt sein, das Ergebnis der linearen Betrachtung zu übersteigern: Ich bezeichne deshalb das

$$1/n \leftrightarrow 1/\sqrt{n} \text{ - Gesetz}$$

dreist als „**mathematischen Beleg der evolutionistischen Bionik**“.

Synthetische Sicht der Leistung der Evolution

Lösungen der biologischen Evolution sind 2-fach ausgezeichnet; sie sind innovativ und sie sind optimumnah. Wir betrachten eine Optimierungslandschaft mit zahllosen Gipfeln (**Bild 3-6**). Jeder Gipfel stellt eine innovative Lösung dar. Ein Gipfel besitzt aber die Eigenschaft, dass er die bergsteigenden Individuen an sich fesselt. Denn Evolution nach unten ist „per definitionem“ nicht möglich. Und die Großmutation, die einen anderen Gipfel in einer Überlebens-Höhe trifft, ist restlos unwahrscheinlich, wie die Theorie der Evolutionsstrategie zeigt. Tatsache ist jedoch, dass die Evolution mit ihren Zigmillionen Arten Zigmillionen Gipfel besetzt, wobei jeder eine neuartige Lösung repräsentiert.

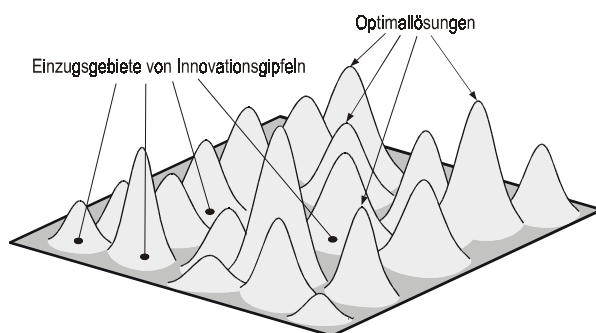


Bild 3-6:

*Innovation und
Optimierung in der
Evolutionlandschaft.*

Es ist die unfassbar große Zahl an Individuen, mit denen die biologische Evolution isoliert experimentiert, die letztlich dazu führt, dass so viele Gipfel bestiegen werden. In der explosiven Phase der Evolution (das sind die letzten 500 Millionen Jahre) haben

10^{42} Bakterien und 10^{28} Tiere

am großen Spiel der Evolution teilgenommen. Die immensen Zahlen entstammen Zähl-Ergebnissen des World Conservation Monitoring Centre (WCMC)*. So wurde die Schätzung von 6 Quintillionen ($6 \cdot 10^{30}$) lebenden Bakterien auf der Erde zugrunde gelegt. Bei einer Generationszeit von einem Tag ergibt sich $365 \times 6 \cdot 10^{30} \times 500 \cdot 10^6 = 1,1 \cdot 10^{42}$.

Der Bioniker sieht darin eine zusätzliche Festigung seines Denkansatzes. Die riesige Zahl parallel bearbeiteter Experimentierobjekte sorgt für das „Anschneiden“ neuer Probleme (innovativer Teil der Evolution), die dann gipfelstürmend nach dem abgeleiteten Klettergesetz gelöst werden (progressiver Teil der Evolution). Die beweisbare Effektivität der biologischen Evolutionsmethode bildet für mich die Grundfeste der Bionik: Bionik ist das Studium von **Ergebnissen der biologischen Evolution** mit der speziellen Sicht, diese in der menschlichen Technik zu nutzen. Mit dem Rückgriff auf **Ergebnisse der biologischen Evolution** soll ein Vorsichtsschild gesetzt werden. Nicht alle Ergebnisse der biologischen Evolution sind nachahmenswert. Leistungen wie die des Kuckucks, nämlich seine Eier in fremde Nester zu legen, werden gewiss nicht den Bioniker reizen.

* Life Counts – Eine globale Bilanz des Lebens. Berlin Verlag 2000.