

# 4

Vorlesung Bionik I im Winter 00/01 - Ingo Rechenberg, TU Berlin

## Vom Vogelflügel zur Windturbine BERWIAN

---

### ***GROWIAN und BERWIAN***

GROWIAN hieß die Riesen-Windkraftanlage, die 1985 auf dem Kaiser-Wilhelm-Koog errichtet wurde. GROWIAN ist das Akronym für „Große Windkraft-Anlage“. Der 100 Meter messende Rotor von GROWIAN rotierte mit 18 Umdrehungen pro Minute. Selbst in den Anfangszeiten des Maschinenbaus drehten die Motoren schneller. Leistung ist bekanntlich das Produkt: Drehzahl mal Drehmoment. Ein Windmotor, der mit nur 18 U/min dreht, muss demnach seine Leistung vornehmlich aus Kräften herausholen. Eben das riesige Drehmoment am GROWIAN-Rotor führte zu enormen Festigkeitsproblemen, so dass die Anlage alsbald abgerissen werden musste.

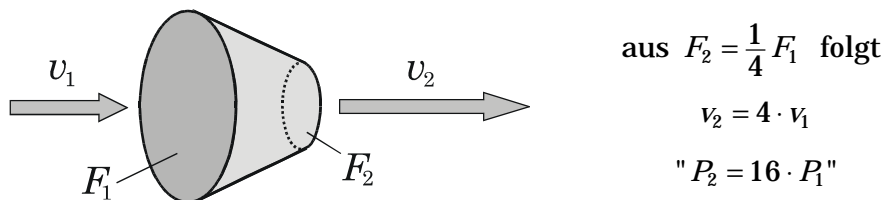
BERWIAN verfolgt eine andere Philosophie: Es gilt, mit kleinen schnelllaufenden Rotoren zu arbeiten, damit, wie im modernen Motorenbau üblich, Leistung mehr aus der Drehzahl und weniger aus den Kräften geerntet wird. BERWIAN, von Berliner Bionikern entwickelt, ist das Akronym für „Berliner Windkraft-Anlage“. Zwar gibt es in der Natur kein studienwertes Vorbild für direkte Windenergienutzung. Lediglich die *Portugiesische Galeere* genannte Qualle hat ein primitives Segel zur Fortbewegung auf dem Wasser entwickelt. Jedoch hat die Natur einen Windbeschleuniger erfunden. Es ist der aufgespreizte Vogelflügel, der wie ein rotationsloser Propeller arbeitet und so den Anströmwind beschleunigt. In einem verdichteten kontrahierten Windstrom ließe sich aber mit kleineren Rotoren arbeiten, die zwangsläufig auch schneller drehen. So wurde der aufgespreizte Vogelflügel zum

Windkonzentrator umfunktioniert. Was dabei herauskam sieht dem Vogelflügel kaum noch ähnlich. Dies entspricht der Philosophie der Bionik, nicht auf plumpe Äußerlichkeiten zu setzen, sondern tieferliegende Prinzipien eines biologischen Vorbilds zu nutzen.

Schließlich soll nicht verschwiegen werden, dass BERWIAN bisher nicht den großen Durchbruch in der Windenergienutzung gebracht hat. Gar zu genial ist die fast verlustfreie rotative Aberntung eines Windenergiefeldes durch einen großen Windmühlenflügel. Und 5 Jahre Entwicklungsarbeit an der neuen Idee konnte den Vorsprung des Jahrhunderte alten klassischen Systems nicht einholen. Doch das Prinzip ist entwicklungsfähig und zudem ein Paradebeispiel bionischer Forschung.

### ***Windenergiekonzentration im Spiegel der Patente***

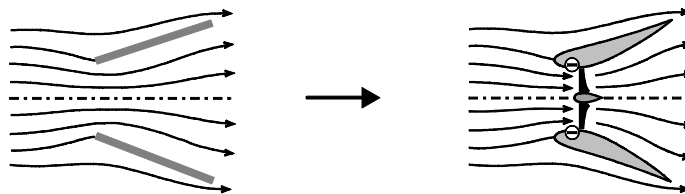
Windenergie zu verdichten, ehe sie einen Rotor antreibt, ist ein uralter Wunsch der Windkraftingenieure. Die Erfindung, die immer wieder gemacht wird, ist der Windtrichter (**Bild 4-1**). „Klein-Fritzchen“ stellt sich seine Funktion so vor:



**Bild 4-1:** Das Paradoxon des Windtrichters.

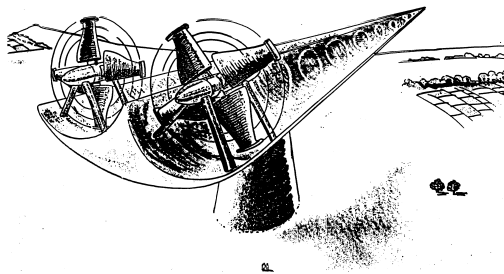
Der Trichter möge seinen Querschnitt auf ein Viertel reduzieren. Wenn aller Wind durch den Trichter gepresst werden würde, vervierfache sich nach der Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeit. Da die pro Zeiteinheit durchgesetzte Strömungsenergie mit der dritten Potenz der Geschwindigkeit steigt, wäre die Windleistung im Querschnitt  $F_2$  gleich dem 16-fachen der Leistung im Querschnitt  $F_1$ . Das ist unmöglich. Da hilft auch nicht, wenn ein Erfinder im Heft 6/86 der Zeitschrift Sonnenergie einen riesigen Fallschirm mit einem Loch im Zentrum als Trichter vor einen Windrotor setzt und obige Rechnung zugrunde legt.

Messungen am Windtrichter zeigen, dass das Prinzip nahezu unwirksam ist. Die Physik hilft sich, indem der meiste Wind am Trichter herumstreicht. Es ist für den Laien schwer zu verstehen, dass der **umgedrehte Trichter** das Problem der Windbeschleunigung löst. Das Funktionsprinzip wird besser verständlich, wenn man die geradlinige Trichterwandung als Tragflügelprofil ausbildet (**Bild 4-2**). Ein angestellter Tragflügel erzeugt bekanntlich auf seiner Oberseite einen Unterdruck ( $\ominus$ ) und damit verbunden eine erhöhte Geschwindigkeit. Durch den Gegentragflügel wird dieser Effekt verstärkt. Es entsteht die sogenannte Mantelturbine, die zu den wirksamsten Konzentratorkonstruktionen gehört.



**Bild 4-2:** Vom umgedrehten Trichter zur Mantelturbine.

Eine imposante Entwicklung stellt der Deltaflügel-Windkonzentratoren dar (**Bild 4-3**). An einem zum Wind angestellten Deltaflügel bilden sich als Folge des Druckunterschieds zwischen Ober- und Unterseite des Flügels zwei besonders kräftige Kantenwirbel heraus. In diese energiebindelnden Randwirbel wurden Windrotoren eingebracht. Die Nutzung von Randwirbeln, wie sie am Ende eines jeden Tragflügels auftreten, wird sich weiter unten als Schlüsselidee zur Windenergiekonzentration erweisen.



**Bild 4-3:**

*Der Deltaflügel als  
Windenergiekonzentratoren.*

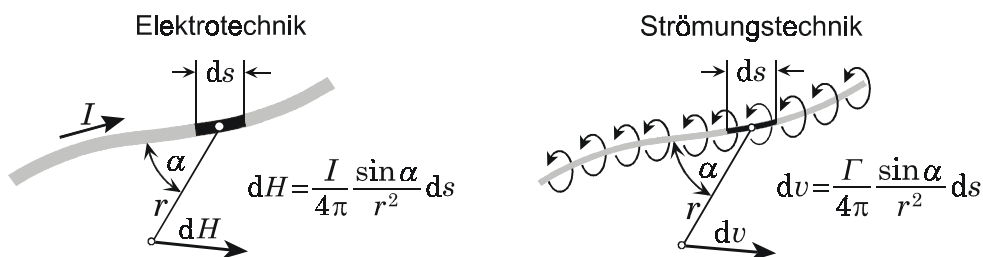
Die Wirksamkeit des Deltaflügel-Windkonzentrators erwies sich dennoch als enttäuschend gering. Windkanalmessungen ergaben einen Konzentrationsfaktor von lediglich 1,7. Der Konzentrationsfaktor  $K$  ist definiert als:

$$K = \frac{\text{Rotorleistung mit Konzentrador}}{\text{Rotorleistung ohne Konzentrador}}$$

Mit  $K$  lässt sich die Wirksamkeit einer Windkonzentrator-konstruktion beurteilen. Ein Konzentrationsfaktor von  $K = 1,7$  ist völlig unwirtschaftlich, wenn man den Bauaufwand des Deltaflügels einbezieht. Eine Mantelturbine erreicht bereits den Konzentrationsfaktor  $K = 3,5$ .

### ***Exkurs in die Elektrotechnik***

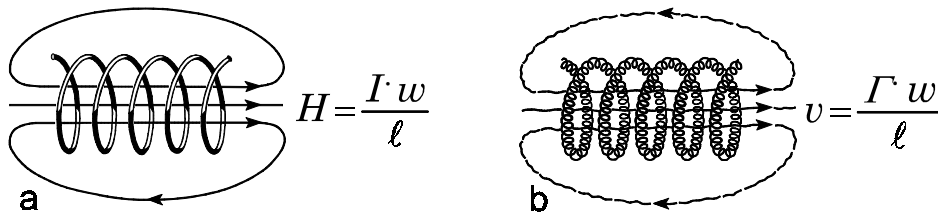
Die Nutzung von Wirbeln zur Konzentration von Strömungsenergie ist aber noch nicht zu Ende gedacht worden. Das zeigt die folgende Analogie: Das magnetische Feld um einen drahtförmigen Leiter sowie das Strömungsfeld um einen Wirbelfaden werden durch das gleiche Gesetz beschrieben, nämlich das BIOT-SAVARTSche Gesetz. Dabei entspricht die magnetische Feldstärke  $H$  in der Elektrotechnik der vom Wirbel induzierten Geschwindigkeit  $v$  in der Ebene der Strömungstechnik. Und der durch den Draht fließende elektrische Strom  $I$  ist auf der strömungstechnischen Seite der Wirbelzirkulation  $\Gamma$  analog (**Bild 4-4**).



**Bild 4-4:** Das BIOT-SAVARTSche Gesetz.

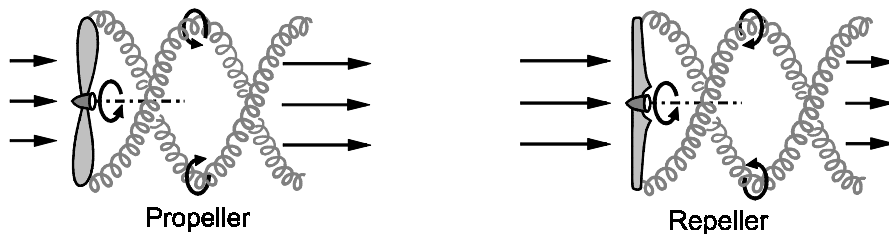
Fragt man nun einen Elektrotechniker, wie man magnetische Feldstärke konzentriert, so wird er die Spule nennen. Fließt elektrischer Strom durch ihre Drahtwindungen, entsteht in ihrem Inneren ein

konzentriertes Magnetfeld. Ein Wirbelfaden, aufgewickelt zu einer Spule, erzeugt dann aufgrund der Analogie im Spuleninneren ein beschleunigtes Geschwindigkeitsfeld. In den im **Bild 4-5** angegebenen Beziehungen stellt  $w$  die Anzahl der Spulenwindungen auf der Länge  $\ell$  dar.



**Bild 4-5:** Magnetspule (a) und Wirbelspule (b).

Bekannte strömungstechnische Vorrichtungen, deren Wirksamkeit durch Wirbelspulen erklärt werden können, sind der Propeller und der Repeller (**Bild 4-6**). Propellerblätter sind Tragflügel, die bei Rotation auf ihrer Vorderseite Sog und auf ihrer Rückseite Druck erzeugen. Der Druckunterschied gleicht sich, wie bei jedem Tragflügel, an den Enden unter Bildung von Randwirbeln aus. Die zwangsläufig mit einem drehenden Zweiblattpropeller mitrotierenden Randwirbel bilden eine Wirbelspule in der Form einer zweigängigen Schraube. Die nach der „Spulenformel“ im Inneren der Wirbelschraube erzeugte Zusatzgeschwindigkeit ergibt nach dem Impulssatz den Schub der Luftschraube. Die Umkehrung der Luftschraube, der Repeller der Windturbine, erzeugt mit seinen rotierenden Tragflügeln zunächst das gleiche Wirbelspulenbild. Da sich die Tragflügelsaugseite aber auf der Rückseite des Repellers befindet, rotieren die Wirbel jetzt anders herum. Dadurch wird die Strömung im Kern der Spule nicht beschleunigt, sondern verzögert.



**Bild 4-6:** Wirbelspulen-Wicklung durch Flügelrotation.

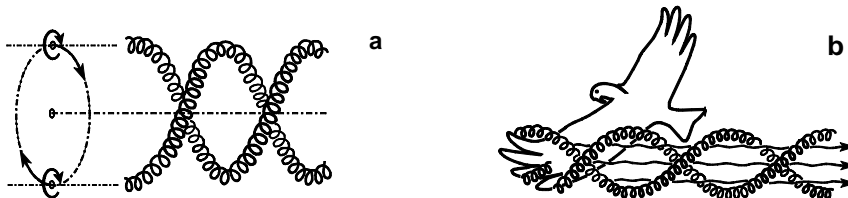
### **Wirbelspule am gespreizten Vogelflügel**

Ein Windkonzentrator soll seiner Bestimmung gemäß nicht rotieren. Die Frage stellt sich: Lässt sich auch ohne drehende Flügel eine Wirbelspule erzeugen? Die Antwort findet sich in der Natur: Die Lösung ist der aufgefingerte Vogelflügel. Der Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Flügels führt an jedem Flügelfinger zur Bildung eines singulären Randwirbels. Nach dem KUTTA-JOUKOWSKISchen Auftriebssatz gilt für die Intensität (Zirkulation)  $\Gamma$  eines Randwirbels die Formel:

$$\Gamma = \frac{1}{2} c_a v_0 t$$

$c_a$  = Auftriebsbeiwert des Flügels  
 $v_0$  = Anströmgeschwindigkeit  
 $t$  = Tiefe des Tragflügels

Am Spreizflügel des Vogels entstehen nun  $z$  Randwirbel. Sie ordnen sich infolge ungleicher Längen der Flügelfinger und ihres Hintereinander-Entstehens annähernd auf einem halben Kreisbogen an. Die gleichsinnig drehenden Wirbel der Intensität  $\Gamma/z$  stoßen sich nach dem Induktionsprinzip gegenseitig an und rollen so wie Kugeln in einem Kugellager stromab umeinander. Ergebnis: Ganz von selbst wickeln sich die Wirbel zu einer Spule auf. Wie anders sollte man ein so „luftiges“ Gebilde wie einen Wirbel sonst zu einer Spule wickeln. Da hat es der Elektrotechniker mit seinem plastisch verformbaren Draht leichter. Die Selbstwicklung einer Wirbelspule (**Bild 4-7a**) ist das geniale Prinzip des aufgespreizten Vogelflügels. Nun drehen sich die Flügelfinger-Randwirbel gerade so herum, dass sie nach der Spulenformel  $w = \Gamma/(n\ell)$  die Strömung beschleunigen. Der Impulssatz liefert einen Schub. Die in den Randwirbeln steckende Energie, die sonst verloren ginge, wird so zum Teil wieder als Schub zurückgewonnen (**Bild 4-7b**). Das ist eine vereinfachte Modellvorstellung, die das Funktionsprinzip des aufgespreizten Vogelflügels anschaulich erklärt.

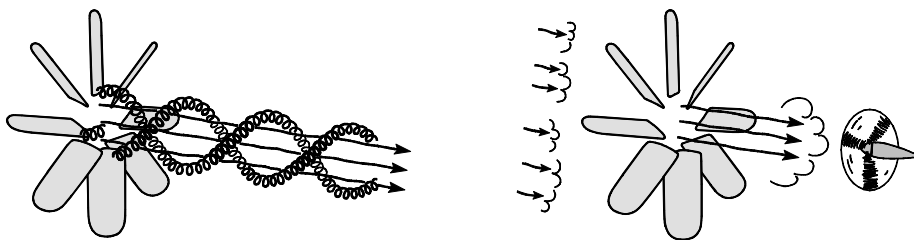


**Bild 4-7:** Prinzip (a) und Realisierung (b) einer Spulen-Selbstwicklung.

## ***Vom Spreizflügel zum Windkonzentrator***

Mit dem aufgespreizten Vogelflügel hat die Natur ein ungewöhnliches Prinzip der Strömungsbeschleunigung erfunden. Tatsächlich ist es bisher in der Strömungstechnik unbeachtet geblieben, dass sich eine strömungsbeschleunigende Wirbelspule auch ohne Drehung eines Flügelsystems erzeugen lässt. Das Prinzip lässt sich für die Windenergiekonzentration umfunktionieren. Die Wirbelkonfiguration am Spreizflügel besitzt jedoch den Nachteil, dass die vorderen Flügelfinger (wegen ihres höheren Auftriebs) Wirbel größerer Intensität erzeugen als die hinteren. Eine Wirbelschraube mit Wirbeln gleicher Intensität lässt sich erzeugen, indem man die Tragflügelfinger als Einzelflügel zu einem Kreis auffächert. Der Flügelfächer erhält innen ein Loch, das Konzentratorauge. Jeder Flügel erzeugt im Konzentratorauge einen Randwirbel. Es entsteht durch die starke gegenseitige Induktion der vielen Wirbel eine stark gewundene Vielfachwirbelschraube mit hoher Strömungsbeschleunigung (**Bild 4-8**). In Windkanalversuchen konnte im Inneren einer so erzeugten Wirbelspule die 2,7fache Geschwindigkeit gemessen werden.

Die Nutzung von Wirbeln zur Strömungsbeschleunigung unterscheidet sich beim Wirbelspulenkonzentrator grundlegend von dem Konzept des Deltaflügel-Konzentrators. Der Rotor arbeitet nicht mehr innerhalb eines rotierenden Wirbelkerns, sondern in einem von den Wirbeln erzeugtem Potentialströmungsfeld. Die Theorie zeigt, dass im Arbeitsbereich des Rotors die Strömung rotationsfrei ist. Ich habe dies anfänglich nicht so recht glauben wollen und deshalb die Strömung im offenen Auge eines Tragflügelsterns genau vermessen. Es findet tatsächlich keine Strömungsrotation statt.



**Bild 4-8:** Der Wirbelspulen-Windenergie-Konzentrator.

### ***Theorie der doppelten Wirbelschichtspule***

Der Wirbelspulenkonzentrator nach dem Vorbild des gespreizten Vogelflügels beschleunigt den Wind mittels schraubenförmig verwundener Randwirbel, die an den Enden eines sternförmig angeordneten Tragflügel-systems entstehen. Es ist die strömungsbeschleunigende innere Wirbelschraube, auf die sich das Augenmerk richtet. Zugleich bildet sich aber an den Außenenden des Tragflügel-systems eine Wirbelspule mit umgekehrt rotierenden Wirbeln aus, die die ankommende Strömung verzögert. Eine exakte Theorie des Wirbelspulenkonzentrators muss beide Wirbelspulen berücksichtigen. Erst durch diese Doppelspule ergibt sich eine physikalisch mögliche Strömung, bei der Kontinuitäts- und Energiegleichung erfüllt werden.

Bei den Prototypen der Windturbine BERWIAN sind es 9 bzw. 13 Wirbel, die sich zur strömungsbeschleunigenden inneren und zur strömungsverzögernden äußeren Wirbelspule formieren. Demgegenüber wird für die Theorie vorausgesetzt, dass jede Spule aus unendlich vielen differenziell kleinen Wirbeln besteht. Diese kontinuierlichen Wirbelschichten kann man sich auch dadurch erzeugt denken, dass die diskreten Randwirbel über den Spulenumfang „verschmiert“ werden. Es ist voraussehbar, dass sich durch diesen mathematischen Trick die Struktur der Formeln wesentlich vereinfacht. Denn das periodisch veränderliche Geschwindigkeitsfeld der diskreten Wirbel muss sich in einem höheren Informationsgehalt der Formeln widerspiegeln. Das muss mit mathematischem Aufwand bezahlt werden! Die kontinuierliche Wirbelbelegung ergibt ein vollkommen radialsymmetrisches Strömungsfeld.

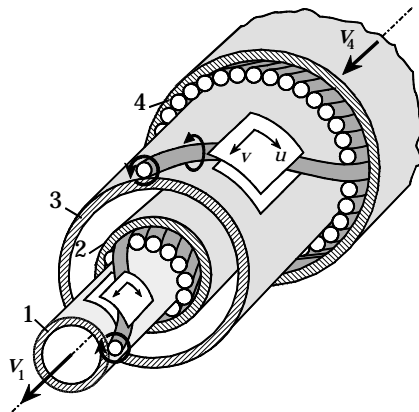
Bei den Tragflügeln als Wirbelgeneratoren nehmen die Wirbelspulen an den Tragflügelrändern ihren Anfang. Die Geschwindigkeitskonzentration wird kurz hinter der Entstehungsstelle der Wirbel genutzt. Demgegenüber setzt die Theorie beidseitig unbegrenzt lange Spulen voraus. Es wird so getan, als wenn sich die Wirbelspule sich bis ins Unendliche erstreckt und der Rotor gewissermaßen auf halber Strecke in den Spulenkern eingebaut ist. Auch diese mathematische Abstraktion verkleinert den Informationsgehalt und damit die Komplexität der Gleichungen. Denn jetzt hängt die Geschwindigkeit innerhalb der Wirbelspule nicht mehr von der Strömungslauflänge ab.



### ***Mechanisch-kinematische Deutung der Theorie***

Eine Wirbelspule mit der Zirkulation  $\Gamma$  und der Windungszahl  $w$  auf der Länge  $\ell$  erzeugt in ihrem Inneren einen Geschwindigkeitszuwachs von  $\Delta v = \Gamma w / \ell$ . Das Problem besteht nun darin, dass – anders als in der Elektrotechnik – im strömungsmechanischen Fall die spezifische Windungszahl  $w/\ell$  nicht vorgegeben ist. Denn die Wirbelspule wickelt sich, angetrieben durch die eigene Drallströmung, von selbst auf. Nachfolgend wird versucht, die Kinematik der Spulen-Selbstwicklung an einem mechanischen Modell zu studieren. Denn eine Schicht aus differentiell kleinen Stabwirbeln verhält sich so wie in der Mechanik eine Reihe rollender Walzen zwischen zwei Flächen. Hier ist klar, dass die rollenden Walzen sich halb so schnell bewegen wie die bewegten Flächen zueinander. Es gilt, diese Vorstellung auf das komplizierte Doppel-Wirbelspulenbild zu übertragen.

Hauptbestandteile des mechanischen Modells sind vier Rohre (**Bild 4-9**). Rohr 1 kann so in das Rohr 2 hineingeschoben werden, dass in dem verbleibenden Zwischenraum ein Kranz Zylinderrollen Platz findet. Dasselbe gilt für die Rohre 3 und 4. Die Zylinderrollen winden sich wie Drähte längs einer Schraubenlinie um das jeweils innen liegende Rohr. Die Drähte bilden die Differentialwirbel der Wirbelspulenschicht nach.



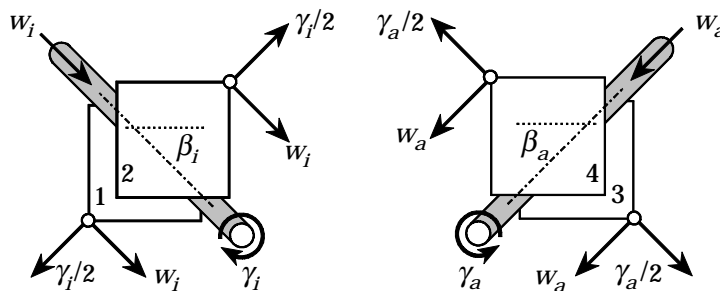
**Bild 4-9:**

*Kinematisches Modell  
der doppelten  
Wirbelspulenschicht.*

Drehung eines Drahtes bedeutet Rotation des Wirbels. Angenommen der Draht erstreckt sich parallel zu den Rohrlängsachsen. Es ergibt sich ein Zylinderrollenlager. Drehen wir einen Draht in Uhrzei-

gerrichtung, halten ihn aber sonst fest, wird sich das innere Rohr links und das äußere rechts herum drehen. Jetzt haben wir aber die vertrackte Situation, dass das innerste Rohr sich nicht drehen soll, und der Wellendraht am Drehort dennoch keine Umfangsbewegung ausführen darf. So ist es in der Strömungstechnik; denn da innere und äußere Wirbelschicht nach der Tragflügeltheorie gleiche (aber entgegengesetzte) Gesamtwirbelstärke  $\Gamma_{\text{ges}}$  aufweisen, und die Wirbel auf den Kreisen nach dem Schwerpunktsatz im Zentrum vereinigt werden dürfen, heben sich dort ihre Drehintensitäten auf.

Das Kunststück gelingt nur, wenn der Draht erstens flexibel ist (Tachometerwelle), und wenn er zweitens während der Drehung in seine Längsrichtung verschoben wird. Ich habe in einem Funktionsmodell den Draht durch einen flexiblen Kunststoffschlauch ersetzt und es ausprobiert: Es funktioniert. Das **Bild 4-10** zeigt die Kinematik der Translation und Rotation.



**Bild 4-10:**  
Bewegungs-  
Analyse zum  
Bild 3-9.

Es gelten die kinematischen Beziehungen:

$$v_1 = +w_i \sin \beta_i + \frac{\gamma_i}{2} \cos \beta_i$$

$$v_2 = +w_i \sin \beta_i - \frac{\gamma_i}{2} \cos \beta_i$$

$$v_3 = +w_a \sin \beta_a + \frac{\gamma_a}{2} \cos \beta_a$$

$$v_4 = +w_a \sin \beta_a - \frac{\gamma_a}{2} \cos \beta_a$$

$$u_1 = +w_i \cos \beta_i - \frac{\gamma_i}{2} \sin \beta_i$$

$$u_2 = +w_i \cos \beta_i + \frac{\gamma_i}{2} \sin \beta_i$$

$$u_3 = -w_a \cos \beta_a + \frac{\gamma_a}{2} \sin \beta_a$$

$$u_4 = -w_a \cos \beta_a - \frac{\gamma_a}{2} \sin \beta_a$$

Hinzu kommen die Randbedingungen:

$$v_4 = v_0, \quad v_2 = v_3, \quad u_4 = 0, \quad u_1 = 0.$$

Zu den 12 Gleichungen (mit noch 14 Unbekannten) kommen die Beziehungen für die Wirbelbelegungen  $\gamma_i$  und  $\gamma_a$  hinzu. Diese Wirbeldichten entstehen durch Verschmierung der Gesamtzirkulation  $\Gamma_{ges}$  auf den Kreisumfang. Das Sinusglied im Nenner berücksichtigt, dass mit enger werdender Wirbelwicklung die Wirbeldichte steigt. Geht  $\beta$  gegen Null, wickeln sich die Windungen übereinander und  $\gamma$  geht gegen Unendlich:

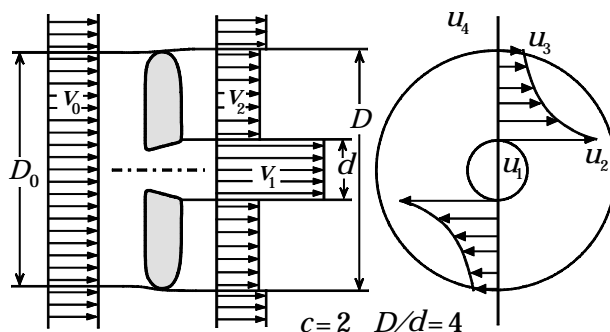
$$\gamma_i = \frac{\Gamma_{ges}}{\pi d \sin \beta_i}, \quad \gamma_a = \frac{\Gamma_{ges}}{\pi D \sin \beta_a}.$$

### **Ergebnis der Theorie: Die Konzentratorformeln**

Hier der Tipp, wie sich das wegen der trigonometrischen Glieder nicht-lineare Gleichungssystem am besten lösen lässt: Man bilde die Ausdrücke  $v_1 - v_2$  und  $v_1 + v_2$  und daraus  $(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)$ . So ergeben sich nach elementarer Rechnung die Formeln:

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + c^2 (1 - d^2/D^2)}, \quad v_2 = v_0 \sqrt{1 - c^2 d^2/D^2} \quad \text{mit} \quad c = \frac{\Gamma_{ges}}{\pi d v_0} = \frac{c_a t z}{2\pi d}.$$

Das **Bild 4-11** zeigt das Strömungsbild für den Konzentratorbeiwert  $c = 2$  und dem Durchmesser Verhältnis  $D/d = 4$ .



**Bild 4-10:**

*Strömungsbild  
in einer doppelten  
Wirbelschichtspule.*

Die Besonderheiten des Geschwindigkeitsbildes sind: Innerhalb und außerhalb des Tragflügelsterns rotiert die Strömung nicht. Außerhalb des Tragflügelsterns ist die Geschwindigkeit gleich der Anströmgeschwin-

digkeit. Das heißt, die Kontinuitätsgleichung muss innerhalb des Systems erfüllt werden: Die Übergeschwindigkeit  $v_1$  kompensiert die Untergeschwindigkeit  $v_2$ . Ferner treten im Bereich der Tragflügelbedeckung beträchtliche Umfangsgeschwindigkeiten auf. Es gilt für  $d/2 \leq r \leq D/2$ :

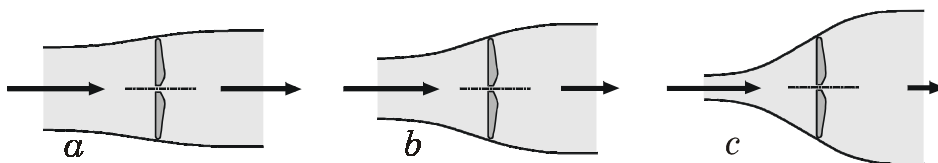
$$u(r) = v_0 \cdot c/2r, \quad \text{speziell:} \quad u_2 = v_0 \cdot c, \quad u_3 = v_0 \cdot cd/D.$$

Zu notieren ist noch die Formel für den statischen Druck. Wegen der Rotation  $u(r)$  im Bereich der Tragflügelbedeckung stellt sich im Konzentratorauge ein kräftiger Unterdruck ein:

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho}{2} v_0^2 c^2 (1 - d^2/D^2).$$

### ***Leistung einer Windkraftanlage.***

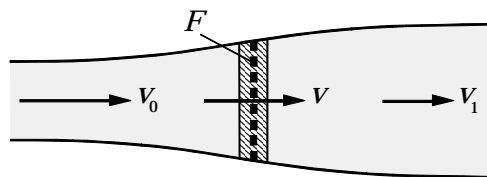
Als das Prinzip BERWIAN erstmals der Öffentlichkeit vorgestellt wurde, erhob sich in der Windkraft-Szene ein Sturm der Entrüstung. Presse-sätze wie „Berliner Bioniker versprechen 8-fache Windkraftleistung“ mussten Widerspruch auslösen. Hatte doch in den 20er Jahren der bekannte Strömungsforscher ALBERT BETZ nachgewiesen, dass sich längst nicht alle Energie, die geometrisch gesehen auf die Stirnfläche eines Windrades auftrifft, energetisch auskoppeln lässt. Der Grund wird im **Bild 4-11** illustriert.



**Bild 4-11:** Schwache (a), mittlere (b) und starke (c) Windabbremmung.

Ein Windrad bremst Strömung ab. Es ist das Defizit an kinetischer Strömungsenergie, die in der Wellenleistung des Windrades wieder erscheint. Doch die Gleichung „starke Windabbremmung = hohe Wellenleistung“ stimmt so nicht. Da gibt es noch die Kontinuitätsgleichung, die besagt, dass sich bei einer Strömungsverlangsamung die Stromröhre aufweitet. Das kann schließlich dazu führen, dass die vom

Windrad wirklich erfasste Stirnstromröhre zu einem dünnen Schlauch degeneriert (**Bild 4-11c**). Es gibt einen optimalen Kompromiss zwischen der Größe der Stirnstromröhre und der Stärke der Strömungsabbremmung. Wir betrachten die Situation, so wie es BETZ getan hat, dass ein Sieb die Strömung abbremst (**Bild 4-12**).



**Bild 4-12:**

Zur Ableitung der BETZ-Formel.

Auf das Sieb wird eine Widerstandskraft ausgeübt. Die Kraft  $W$  muss als Druckdifferenz zwischen vorderer und hinterer Fläche des schraffierten Luftpakets wieder erscheinen. Das schraffierte Luftpaket selbst möge sich mit der Geschwindigkeit  $v$  durch die Siebebene bewegen. Massenstrom und Leistung in der Siebebene berechnen sich zu:

$$\dot{m} = \rho F v, \quad L = W \cdot v.$$

Die Leistung  $L$ , die vom abbremsenden Sieb als Wärme abgeführt wird, würde bei einem die Strömung abbremsenden Repeller als Wellenleistung abgegeben werden. Mit dem Massenstrom  $\dot{m}$  lassen sich Impuls- und Energiesatz formulieren:

$$\dot{m}(v_0 - v_1) = W, \quad \frac{\dot{m}}{2}(v_0^2 - v_1^2) = L.$$

Die vier Gleichungen können zur Bestimmung von  $W$ ,  $L$ ,  $v$ , und  $\dot{m}$  herangezogen werden. Wir bestimmen explizit  $v$  und  $L$ :

$$v = \frac{1}{2}(v_0 + v_1), \quad L = \frac{1}{4} \rho F (v_0 + v_1)(v_0^2 - v_1^2).$$

Es werde der Wirkungsgrad definiert:

$$c_p = \frac{\text{gewonnene Wellenleistung}}{\text{geometrisch auf } F \text{ treffende Leistung}} = \frac{L}{\frac{\rho}{2} F v_0^2 v_0}.$$

Der als BETZscher Leistungsbeiwert bezeichnete Wirkungsgrad  $c_p$  einer Windturbine besitzt das Maximum

$$c_{p(\max)} = \frac{16}{27} = 0,593 \quad \text{für} \quad v_1 = \frac{1}{3} v_0.$$

Mehr Leistung lässt sich aus einem scheibenförmigen Windrad nicht herausholen. „Hochgezüchtete“ Windrotoren können einen  $c_p$ -Wert von 0,50 erreichen, das sind 85% des theoretischen Maximums.

ALBERT BETZ hat zwei Tricks angegeben, um den Wert 16/27 doch zu erhöhen. Erster Trick: Man ordne mehrere Windräder gleichen Durchmessers in genügendem Abstand hintereinander an. Zweiter Trick: Man setze vor den Repeller einen windbeschleunigenden Propeller. Das kann auf der gleichen Welle geschehen und ist dennoch kein *Perpetuum mobile*. Durch den Propeller wird die Luft wie von einem Trichter gesammelt. Dem Repeller wird so ein höherer Massenstrom zugeführt. Doch die Sache geht nur in der Theorie. Es sind die Verluste, wie BETZ zeigt, die den Trick nicht funktionieren lassen. BERWIAN fungiert als ein vor den Windrotor platzierter windbeschleunigender Propeller. Es lässt sich auch hier gewiss nicht mehr als 16/27 der Energie ernten, die aus geometrischer Sicht auf die Konzentrationstirnfläche auftrifft.

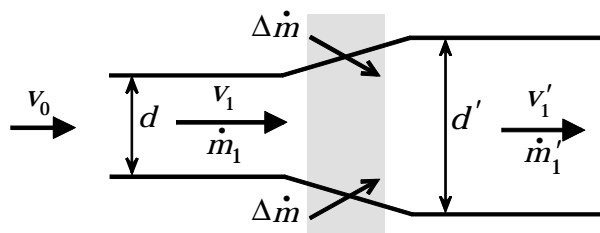
### ***Leistung von BERWIAN***

„Blauäugig“ bin ich davon ausgegangen, dass ein Rotor in einer Wirbelspule sich nicht anders verhält wie ein freier Rotor, der mit der erhöhten Geschwindigkeit  $v_1$  angeströmt wird. Mit dieser Vorstellung ergibt sich eine Leistungserhöhung, bezogen auf den nicht konzentrierten Wind:

$$K = \left( \frac{v_{\text{Spule}}}{v_{\text{Wind}}} \right)^3 = \left[ 1 + c^2 \left( 1 - d^2/D^2 \right) \right]^{3/2} \quad \text{mit} \quad c = \frac{c_a t z}{2\pi d}.$$

Die Formel für den Konzentrationsfaktor hat vernünftige Voraussagen für die Leistung von BERWIAN geliefert. Heute bin ich mir der Richtigkeit der  $K$ -Formel nicht sicher. Sieht man nämlich genauer hin, werden die Vorgänge in einer Wirbelspule überraschend kompliziert. Ein Rotor weitet eine Wirbelspule auf, wenn er dieser Leistung ent-

zieht. Es bildet sich eine Wirbelspule mit dem Durchmesser  $d'$  (siehe **Bild 4-13**). Die Zirkulation  $\Gamma_{\text{ges}}$  der Spulenwirbel bleibt dabei erhalten. Das Dilemma ist nun, dass die Geschwindigkeit, erzeugt von der aufgeweiteten Wirbelspule, ungleich der Geschwindigkeit ist, die die Kontinuitätsgleichung liefert. Da rechnerisch die Spulenbedingung eine höhere Geschwindigkeit fordert als die Kontinuitätsbedingung liefert, muss Strömung in die Spule eintreten.



**Bild 4-13:**

*Aufweitung einer  
Wirbelspule.*

Für den vereinfachten Fall  $D \rightarrow \infty$  muss rechnerisch in die aufgeweitete Wirbelspule die Menge

$$\Delta \dot{m} = \dot{m}'_1 - \dot{m}_1 = \frac{\pi d^2}{4} v_0 \left( d/d \sqrt{(d'/d)^2 + c^2} - \sqrt{1 + c^2} \right)$$

einströmen. Die neue Frage stellt sich: Was geschieht mit der Rotation, die das einströmende Fluid  $\Delta \dot{m}$  besitzt? Beginnt hinter der Aufweitung der Kern der Wirbelspule nun doch zu rotieren? Die Gleichungen liegen vor. Wer entwickelt – in Analogie zur BETZschen Ableitung – die exakte Leistungsformel für einen Rotor in einer Wirbelspule?