Von Bäumen und Adern
Optimierung in der Natur (I)

Der kubisch paraboloide Baumstamm

Der Denkansatz der Bionik lautet: Die Welt der Biologie ist voller Optimallösungen. Wir müssen sie nur erkennen, um sie technisch zu nutzen. — Dies ist eine Hypothese. Wir möchten Beweise sehen. Es sollte möglich sein, an einfach zu durchschauenden biologischen Objekten nachzuweisen, dass sie Optimallösungen darstellen. Eindrucksvoll wäre, wenn sich Beispiele finden ließen, bei denen es gelingt, den Optimalitätsbeweis mathematisch zu vollziehen. Beginnen wir mit einem besonders einfachen Fall:

Wir untersuchen einen Baum. Seine Krone bildet – technisch gesehen – eine solarzellenbetriebene CO_2-Sammelfläche. Dem Stamm kommt die Aufgabe zu, diesen vom Sonnenlicht abhängigen Funktionsteil möglichst hoch über dem Erdboden zu lokalisieren (***Bild 5-1***). Es ist gewiss von Vorteil, wenn diese Aufgabe mit einem Minimum an

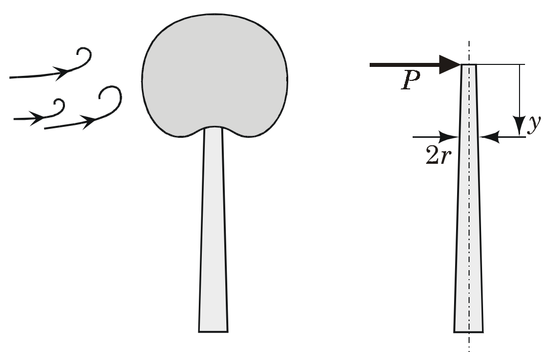


Bild 5-1:

Baumstamm als Biegestab.

Material gelöst wird. Denn Materialbildung erfordert Energie und Zeit. Evolutionistisch gedacht: Unnötiger Materialaufwand schmälert den Vermehrungserfolg des Baumes.

Idealisiert besteht unser Baum aus einem einseitig eingespannten kreiszylindrischen Stab mit der Windlast P an seinem freien Ende. Die Festigkeitslehre hat mit dem „Träger gleicher Festigkeit“ das Material-Minimierungsproblem gelöst. Die Optimalform wird beschrieben durch:

$$r(y) = \sqrt[3]{4Py/(\pi\sigma_{zul})}$$

Dabei ist r der Halbmesser des Stamms und y die vom Kraftangriffspunkt nach unten gemessene Stammlänge. Um es noch einmal anders auszudrücken: Ein Träger dieser Form bricht theoretisch zugleich an jeder Stelle, wenn die Biegespannung den zulässigen Wert überschreitet.

Ich habe auf einem Waldspaziergang im Berliner Tegeler Forst frisch gefällte Kiefern vermessen. Die Messwerte eines besonders schönen Exemplars sollen mit der theoretischen Optimalkontur verglichen werden. Da die Last P nicht bekannt ist, lässt sich bezüglich der absoluten Halbmesser r kein Vergleich anstellen. Wir können jedoch fragen, ob sich die Kiefern von der Krone abwärts nach einem 1/3-Potenzgesetz verdicken. Dafür wurde die Konstante in dem Gesetz $r = (\text{konst} \cdot y)^{1/3}$ solange manipuliert, bis Theorie und Messung maximal übereinstimmten. Dieses „Übereinanderschieben“ der Kurven von Theorie und Experiment muss berücksichtigt werden, bevor jemand die vergleichende Darstellung im ***Bild 5-2*** über Gebühr bewundert.

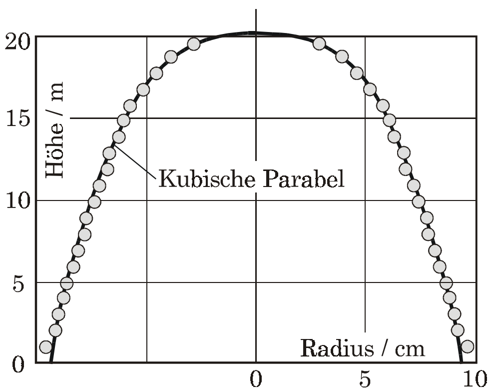


Bild 5-2:

Optimalform eines Kiefernstamms.

Die Schwierigkeit kehrt ständig wieder, wenn man biologische Lösungen mit dem Ergebnis einer Optimalrechnung vergleicht. Es fehlt die Kenntnis der genauen biologischen Randbedingungen, wie z. B. oben die maximale Windlast an Bäumen, um absolute Zahlenwerte nebeneinander stellen zu können. Die Gegenüberstellung von biologischer Realität und theoretischem Optimum ist beschränkt. Der Ausweg aus diesem Dilemma ist, nach größeninvarianten Formmerkmalen und dimensionslose Kenngrößen zu suchen und diese vergleichend zu studieren.

Als ich meinen Vergleich der Berliner Kiefern mit dem festigkeitstheoretischen Optimalträger durchführte, ahnte ich nicht, dass dies längst bekannt war. Schon 1894 hatte der Forstbiologe K. METZGER in einer Arbeit mit dem Titel *„Studien über den Aufbau der Bäume nach statischen Gesetzen“* darauf hingewiesen, dass die Schäfte von Fichten Träger gleicher Festigkeit bilden. Und nochmals 20 Jahre früher hatte der Berliner Botanik-Professor S. SCHWENDENER klar ausgesprochen, dass Grashalme Träger gleicher Festigkeit darstellen. Wer gut gewachsene Gras- und Schilfhalme sammelt, kann das 1/3-Potenzgesetz leicht selbst ausmessen.

Das Dritte-Wurzel-Gesetz der Blutgefäße

Ich komme nun zu einer biologischen Vorrichtung, die von der Evolution wesentlich exakter optimiert wurde. Es ist dies das Blutgefäßsystem. Der Ingenieur würde es ein vielverzweigtes Rohrleitungsnetz nennen. Physiologen haben an einem 13 kg schweren Hund die Geometrie des Blutgefäßsystems genau vermessen. Ich entnehme die Daten dem Lehrbuch *„Physiologie des Menschen“* von RHEIN/SCHNEIDER:

Gefäßart	***Durchmesser D [mm]***	***Anzahl***
Aorta	10	1
Große Arterien	3	40
Arterienäste	1	600
Arterienzweige	0,6	1800
Arteriolen	0,02	40 000 000
Kapillaren	0,008	1 200 000 000

Die Auftragung $D = f(z)$ im ***Bild 5-3*** mit doppelt logarithmischem Maßstab zeigt eine mathematische Gesetzmäßigkeit.

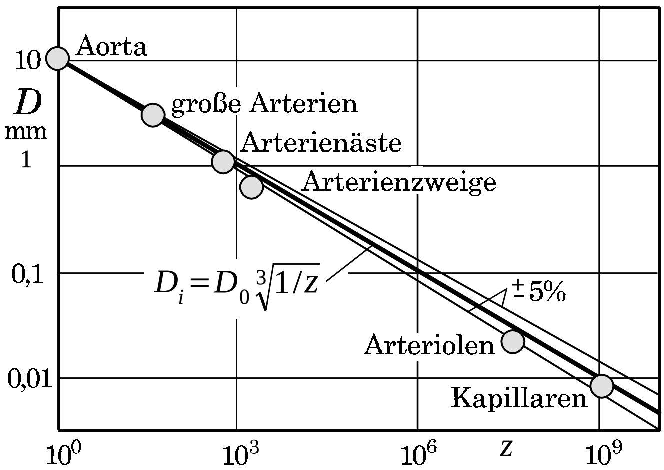


Bild 5-3:

Gesetz der Verzweigung von Blutgefäßen.

Es gilt die einfache Formel:

$$D(z) = D_0 \sqrt[3]{1/z}\ .$$

Dieses „wohlgeformte" Gesetz wird bezüglich der Potenz 1/3 sogar mit der erstaunlichen Genauigkeit von ±5% eingehalten. Die Frage liegt nahe: Spiegelt sich hier ein Optimierungsgesetz wider? Betrachten wir im ***Bild 5-4*** zwei extreme Geometrien einer Gefäßverzweigung:

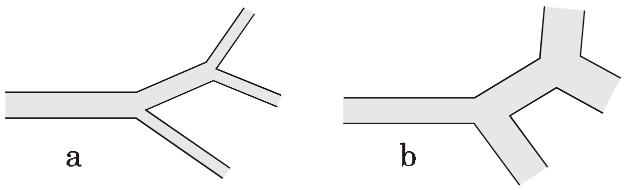


Bild 5-4:

Zwei Entwürfe für eine Rohrverzweigung.

Welche der beiden Verzweigungen ist energetisch günstiger? Der Entwurf (a) verengt seine Durchmesser mit wachsender Zahl der Zweige. Demgegenüber vergrößern sich beim Entwurf (b) die Durchmesser stromab. Uns kümmert nicht, ob sich die Systeme auch realisieren lassen. Wir fragen nach dem Energieverbrauch. Etwas weiter ausgeholt:

Wo bleibt die Energie, die ein Mensch durch seinen Nahrungsumsatz erzeugt? So beträgt der Energieinhalt von:

100 Gramm Leberwurst	*1070 kJ*
100 Gramm Butter	*3290 kJ*
100 Gramm Spinat	*63 kJ*

Ein Mensch verbraucht am Tag etwa 10 000 kJ. Würden wir die organischen Energieverbraucher aufschlüsseln, käme vielleicht die Aufgliederung im ***Bild 5-5*** zustande:

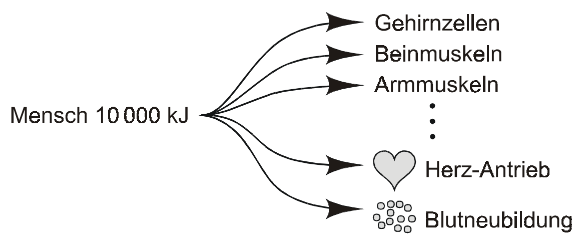


Bild 5-5:

Aufteilung des menschlichen Energieumsatzes.

Die Menge des neuzubildenden Blutes im Organismus ist erheblich. In etwa 120 Tagen wird unser Blut durch neues Blut ersetzt. Rechnet man das auf die Zahl von Blutkörperchen um, so ergibt sich die erstaunliche Menge von drei Millionen Blutkörperchen, die in unserem Körper pro Sekunde gebildet werden müssen. Das kostet natürlich ebenso Energie wie der Antrieb des Herzmuskels.

Nach welchen Kriterien wird die Evolution wohl am Blutkreislauf optimiert haben? Wahrscheinlich nach minimalem Energieverbrauch. Denn Hunger ist alltäglich in der Natur. Und ein Lebewesen, das weniger Energie und damit weniger Nahrung braucht, wird in Zeiten des Mangels eher überleben. Es kann sich überdies häufiger im sicheren Versteck aufhalten, und es kann sich mehr der Fortpflanzung widmen.

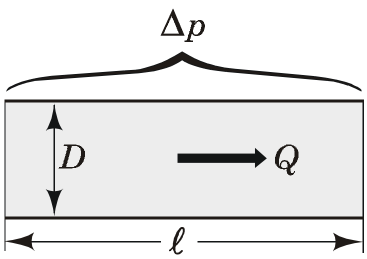
Vergleichen wir daraufhin die Verzweigungssysteme (a) und (b) bezüglich ihres Energieverbrauchs:

	a	**b**
Pumpleistung Herz [kJ]	*groß*	*klein*
Neubildung Blut [kJ]	*klein*	*groß*

Wir können die aufzuwendende Leistung für die Blutneubildung technisch treffend als Wartungskosten deuten. — Der Grund für die Betrachtung der Extreme? Zwischen den Lösungen (a) und (b) ist ein Optimum zu vermuten. Wir wollen die biologische Qualität einer Verzweigungsstruktur als Gesamt-Energiekosten pro Zeiteinheit mathematisch formulieren und machen den additiven Ansatz:

$$\textit{Qualitätsfunktion} \;\; F = E'_{Herz} + E'_{Blutneubildung} \, .$$

Das Herz als Pumpe muss das Blut gegen einen Widerstand (Reibung an der Gefäßwand) durch das Röhrensystem hindurchtreiben. Wir betrachten einen kleinen Abschnitt eines Blutgefäßes:



Für eine Laminarströmung gilt das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE:

$$\Delta p = \frac{128 \mu l Q}{\pi D^4} \, .$$

Es bedeuten: Q [m^3/s] der Mengenstrom und μ [Ns/m^2] die Zähigkeit des Strömungsmediums. Die im Rohrstückchen aufzubringende Pumparbeit E' pro Zeit bestimmt sich zu:

$$Kosten_{Pumpen} = Kraft_{Strömungspfropfen} \cdot Geschwindigkeit_{Strömungspfropfen}$$

$$= \; \Delta p \, F \cdot v \; = \; \Delta p \cdot Q \, .$$

Die Bluterneuerungskosten (biologische Wartungskosten) setzen wir proportional zum Gefäßvolumen an:

$$Kosten_{Bluterneuerung} \propto V_{Rohr} = k V_{Rohr} \, , \qquad \textit{Dimension von k:} \; \frac{Nm}{m^3 s} \; .$$

Das bedeutet: Die Herstellung von 100 Blutkörperchen ist 100 mal so teuer als die eines Blutkörperchens. Der Proportionalitätsfaktor k gibt den zu zahlenden Energiepreis pro Kubikmeter und pro Sekunde neu zu bildender Blutkörperchen an. Kurz: k bringt die Dimensionen der Gleichungsterme auf einen „Nenner“. Nun summieren wir beide Energiekosten über die gesamte Verzweigungsstruktur (***Bild 5-6***) und erhalten für die Qualität F:

$$F = \sum_{i=0}^{n} \Delta p_i Q_i + \sum_{i=0}^{n} k V_i \; .$$

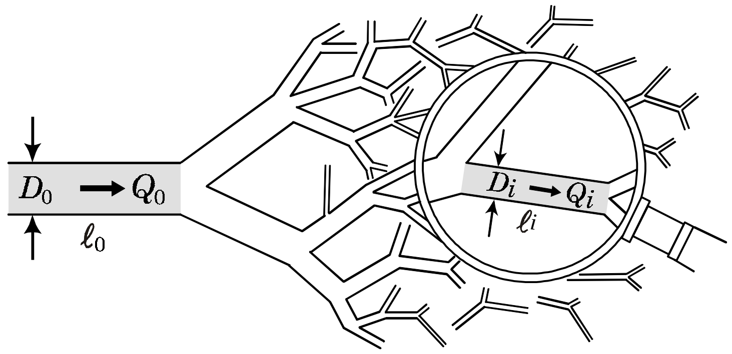


Bild 5-6:

Zur Ableitung des universellen Verzweigungs-Gesetzes.

Es erweist sich als zweckmäßig, zwischen dem Rohr „0“ und den Rohren „i“ zu unterscheiden:

$$F = \Delta p_0 Q_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i Q_i + k V_0 + \sum_{i=1}^{n} k V_i \; .$$

Das Minimierungsproblem lässt sich ausformulieren:

$$F = \min \left\{ \frac{128 \mu \, l_0 Q_0}{\pi D_0^4} Q_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{128 \mu \, l_i Q_i}{\pi D_i^4} Q_i + k \, l_0 \frac{\pi}{4} D_0^2 + \sum_{i=1}^{n} k \, l_i \frac{\pi}{4} D_i^2 \right\}$$

Wir bilden nach den Schulregeln der Extremwertfindung einer Funktion:

$$\frac{\partial F}{\partial D_0} = \cdots = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial D_i} = \cdots = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots n \; .$$

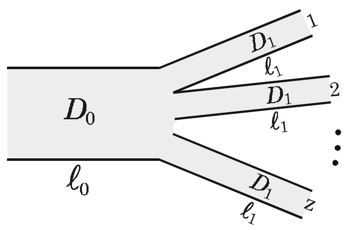
Die Gleichungen lassen sich elementar nach D_0 und D_i auflösen:

$$D_0^6 = \frac{1024 \mu \, Q_0^2}{k \pi^2}, \qquad D_i^6 = \frac{1024 \mu \, Q_0^2}{k \pi^2}, \qquad i = 1, 2, \cdots n \; .$$

Es verwundert, dass die Längen l_i aus den Lösungen herausfallen. Das erklärt sich dadurch, dass sowohl Pump- als auch Volumenterm im Kostenansatz F sich proportional mit l_i ändern. Wir bestimmen das Durchmesserverhältnis und freuen uns, dass sich nun auch der unbekannte Kosten-Relationsfaktor k herauskürzt.

$$D_i \big/ D_0 = \sqrt[3]{Q_i / Q_0}\ .$$

Das Ergebnis überrascht. Sind die Anfangswerte D_0 und Q_0 gegeben, hängt der optimale Durchmesser eines jeden Rohrzweiges nur von seiner eigenen Durchflussmenge ab. — Springen wir vom Allgemeinen zum Besonderen. Gegeben ist eine Verzweigung, deren Anfangsdurchmesser D_0 sich gleichmäßig in die z Durchmesser D_1 aufspaltet:



$$D_1 = D_0 \sqrt[3]{1/z}$$

Das ist die biologische Lösung. Sie ist genau dann erfüllt, wenn sich, egal wo, in der Verzweigung z Äste gleichen Durchmessers finden, durch die der gesamte Blutstrom Q_0 hindurchfließt. Genau nach diesem Schema wurde aber das Gefäßsystem des Hundes messend aufgegliedert. Das „Wunder“ der exzellenten Übereinstimmung von Theorie und biologischer Wirklichkeit ist also nur möglich, weil die Optimallösung die umfassende Eigenschaft der Unabhängigkeit von k und l_i aufweist.

Mit dem universellen Durchmessergesetz ist das Blutgefäßsystem erst halb optimiert. Jetzt kämen eigentlich die Verzweigungspunkte an die Reihe. Denn durch ein geschicktes Legen der Verzweigungspunkte könnten Längen l_i eingespart werden. Das Problem ist jedoch, dass in Wirklichkeit der Wahl der Verzweigungspunkte enge Grenzen gesetzt sind. Hinzu kommt, dass noch die Randbedingung der Druckgleichheit in den Kapillaren erfüllt werden muss. Ich gestehe: das Problem konnte von uns noch nicht zur Zufriedenheit gelöst werden. Wir müssen uns mit der halben Optimierung des Blutgefäßsystems zufrieden geben.

Hydraulik des Hämatokrits

Die biologische Evolution hat noch eine weitere Optimallösung im Blutkreislauf erarbeitet: den Hämatokrit. Wird frisch entnommenes Blut ungerinnbar gemacht und dann zentrifugiert, sedimentieren die Blutzellen. Der prozentuale Volumenanteil der Blutzellen zum Gesamtblutvolumen

$$H = \frac{Volumen\ Blutzellen}{Gesamtvolumen}$$

wird Hämatokrit genannt. — Welches ist die primäre Aufgabe des Blutkreislaufs? Die Förderung von Blutkörperchen muss ja einen Sinn haben. Der Sinn ist eine Atemfunktion des Bluts. In einer Ladestelle, nämlich der Lunge, werden die Blutkörperchen mit Sauerstoff aufgefüllt. In diesen „Containern" wird der Sauerstoff dann hydraulisch zu den Verbraucherstellen im Gewebe transportiert. Natürlich hat das Blut noch viele andere Aufgaben zu erfüllen, wie den Transport von Nährstoffen, Schlacken, Hormonen, Antikörpern usw. Doch wir interessieren uns hier nur für die Hauptaufgabe des Blutes, und das ist die Förderung von sauerstoffgefüllten Miniaturbehältern.

Es besteht das energetische Optimierungsproblem: Bei vorgegebener Herz-Pumpleistung sollen möglichst viele Blutkörperchen von A nach B gefördert werden. Wir betrachten die zwei Grenzlösungen (a) und (b) im ***Bild 5-7***:

Bild 5-7: *Zwei Alternativen der Blutkörperchen-Förderung.*

Welche Lösung ist besser? Die Lösung (a) nach dem Motto „viel hilft viel" verstopft die Strömung: Die vielen Sauerstoff-Container machen das Strömungsmedium gleichsam zäh. Die Fördergeschwindigkeit v ist klein und damit letztlich auch der Festkörpertransport. Ganz anders im Fall (b): Die wenigen Behälterchen werden die Strömung kaum beeinflussen. Die Geschwindigkeit v ist hoch. Doch das geförderte Fest-

Volumen bleibt dennoch klein, diesmal wegen der geringen Zahl der Container im Flüssig-Volumen. In einer Veröffentlichung, deren Autor ich leider nicht mehr kenne, wurde eine optimale Partikelzumischung (Blutkörperchen) von

$$H_{\mathrm{optimal}} = 43{,}3\%\,.$$

berechnet. Diese Lösung schien in sehr guter Übereinstimmung zu stehen mit dem Hämatokrit des Menschen. In medizinischen Büchern wird gemeinhin angegeben:

$$H_{\mathrm{Mensch}} = 42 - 44\%\,.$$

Nun gibt es aber Lebewesen mit Hämatokrit-Werten, die beträchtlich von der obigen theoretischen Lösung abweichen. Hier einige Zahlenwerte:

$$H_{\mathrm{Kamel}} = 28\%\,,$$
$$H_{\mathrm{Schaf}} = 32\%\,,$$
$$H_{\mathrm{Schwein}} = 41\%\,.$$

Hat die Evolution hier vergessen zu optimieren? Oder hat das Blut dieser Tiere jeweils verschiedene Strömungseigenschaften? Nun, wir haben es experimentell geprüft:

In einer Studienarbeit hat J. LODER (1975) das Blut von Schweinen und Schafen untersucht. Zunächst wurde das Blut zentrifugiert, das heißt in Flüssig- und Festbestandteile getrennt. Mit den beiden Blutsubstanzen konnten künstliche Hämatokrit-Werte gemischt werden. Die H-Mischung wurde in eine auf besondere Leichtgängigkeit präparierte Glas-Injektionsspritze (***Bild 5-8***) gefüllt. Ein Gewicht auf

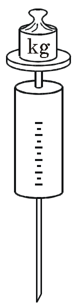


Bild 5-8:

Simples Versuchsgerät zur Messung des Blutzellen-Volumenstroms Q_p.

dem Daumenteller der Spritze erzeugt die konstante Pumpkraft. Gemessen wird die Ausflusszeit. Daraus lässt sich bei bekannter Blutkörperchen-Zumischung der Partikel-Mengenstrom Q_p bestimmen.

Das Ergebnis konnte nicht besser ausfallen (***Bild 5-9***). Beim Schweineblut ergibt sich maximaler Partikeltransport (Blutkörperchenstrom) für ein Mischungsverhältnis von H = 41,5%. Und füllt man die Glasspritze mit Schafblut, so ist für H = 32% der Blutkörperchentransport maximal. Quintessenz: Die biologische Evolution hat bei beiden Lebewesen genau das Optimum eingestellt. — Das ist ein exzellenter Beweis für die Optimierung in der Evolution!

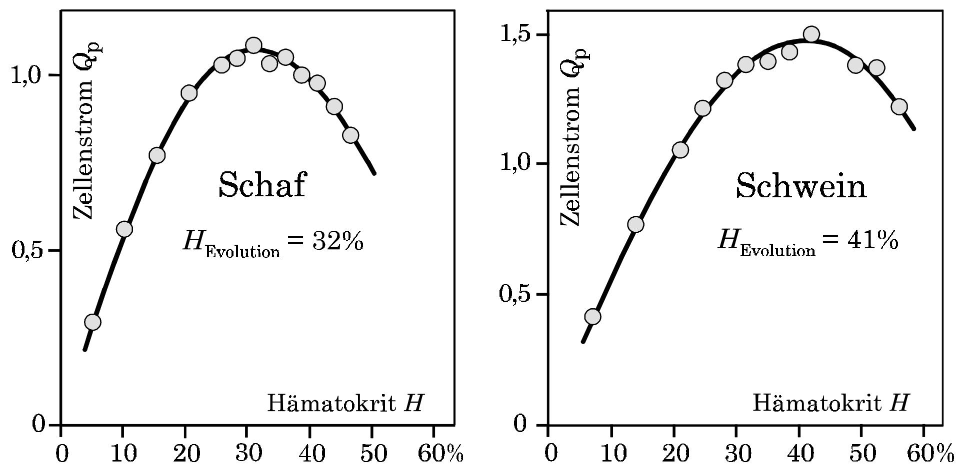


Bild 5-9: *Optimaler Blutkörperchenstrom.*