

Über Größe und Leistung Optimierung in der Natur (III)

Die Rüstung RICHARD DES DRITTEN *

„SHAKESPEARE stellt RICHARD DEN DRITTEN als zu kurz geraten und von klumpiger Missgestalt hin. Hatte König RICHARD dadurch, dass er klein war, beim Kampf in voller Ritterrüstung Vorteile? Genau das hat der Historiker GARRETT MATTINGLY vermutet, der zu den führenden Fachleuten auf dem Gebiet der Tudorzeit gehört.



Die Körpergrößen von Männern schwankten im Mittelalter vielleicht zwischen 1,55 und 1,85 Meter. Die Körperoberflächen nehmen dann mit dem Quadrat der Körpergröße zu. Eine Ritterrüstung, die an die Körperoberfläche angepasst werden musste, wog also bei einem kleinen Ritter wie RICHARD erheblich weniger als bei einem großen. Dass also RICHARD III in der Schlacht ein todbringender Gegner war, könnte – so MATTINGLYS Spekulation – zumindest teilweise darauf zurückzuführen sein, dass ihn seine Rüstung weniger behinderte.

Nach einem Vortrag wurde MATTINGLY von einem Hörer vorgehalten, er habe da einen interessanten Gedanken leider falsch entwickelt. Es komme – so der Einwand – auch auf die Muskelkraft an, und diese sei eine Angelegenheit der Muskelmasse. Da das Muskelvolumen so wie

* In Anlehnung an HORACE FREELAND JUDSON (The Search for Solutions, S 54 - 56).

das Körpervolumen mit der dritten Potenz der Körpergröße steige, während die zu schützende Körperoberfläche nur mit dem Quadrat der Größe zunimmt, müsste der größere Ritter auch in voller Rüstung stärker sein als der kleinere. Demnach war RICHARD im Nachteil.

Nun mischte sich ein zweiter Hörer ein. Das mit der Muskelkraft sei falsch. Die Stärke eines Muskels ist nicht proportional zu seiner Masse, sondern zu seiner Querschnittsfläche. Und diese nimmt nur mit dem Quadrat der Körpergröße zu, eben so wie die Körperoberfläche. Demnach besitzt ein großer Ritter in voller Rüstung die gleichen Vor- und Nachteile wie der kleine.

Jetzt protestierte ein dritter Hörer, ein Ingenieur. Richtig ist die Überlegung für die Muskeln, aber nicht für die Rüstung. Das Gewicht der Rüstung wächst nämlich nicht so wie die Körperoberfläche, sondern eher proportional zum Gewicht des Trägers. Das liegt daran, dass man bei einer größeren Metallfläche das Material überall merklich verstärken muss, um dieselbe Festigkeit zu erreichen. Vielleicht hat also RICHARD doch einen Vorteil gehabt.“

Wäre auch ich dem Vortrag zugegen gewesen, hätte mein Einwand gelautet, dass der große Ritter längst einem Hitzschlag erlegen wäre, während RICHARD noch weiterkämpfte. Denn die im Körpervolumen produzierte Kampfeshitze muss ja über die Oberfläche abgegeben werden, und diese ist beim kleinen Ritter relativ größer als beim großen. Hier möge der Diskussionsleiter den Disput beenden. – Die Quintessenz ist: Die Leistung eines Lebewesen (oder einer Maschine) ändert sich in unerwartet komplizierter Weise mit einer Zu- oder Abnahme der Größe.

Isometrie, Allometrie, Beltistometrie

Isometrie leitet sich vom griechische ισος für „gleich“ und **Allometrie** vom griechischen αλλοιος für „verschieden“ ab. Isometrie (wörtlich mit gleichem Maß) bezeichnet eine geometrisch ähnliche Größenänderung, Allometrie (wörtlich mit verschiedenem Maß) kennzeichnet eine geometrisch verzerrte Größenänderung. Während Isometrie und Allometrie zur gängigen biologischen Terminologie gehören, ist **Beltistometrie** meine eigene Wortschöpfung, die sich vom griechischen βελτιστος für „bester“

herleitet. Beltistometrie (mit bestem Maß) soll ausdrücken, dass sich Proportionen bei einer Größenänderung optimal umgestalten.

Der erdichtete Disput nach MATTINGLYs Vortrag hat gezeigt, dass eine Leistung nicht kurzerhand von klein auf groß übertragen werden kann. Jede Größe besitzt ihre eigene optimale Gestalt. Isometrie wird eher die Ausnahme sein. Für jede Größe eines Lebewesens muss die Evolution ein verändertes Optimierungsproblem lösen, und zwar auch dann, wenn die Randbedingungen (Umweltbedingungen) gleich bleiben. Optimalität (vorsichtiger Optimumnähe) einer biologischen Lösung lässt sich deshalb so schwer beweisen, weil die genauen Umwelt-Daten fehlen. Welche Lastfälle zehren an der Widerstandskraft eines sturmgepeitschten Baumes? Wie sieht der tägliche Flugplan einer futtersuchenden Meise aus? Doch die speziellen Umweltbedingungen „kürzen sich heraus“, wenn nicht nach absoluten Maßen, sondern nach Regeln der **Größen-Änderung** (z. B. den Exponenten in Potenzgesetzen) gesucht wird. Das Studium der dimensionslosen Größenabhängigkeit einer Optimallösung unter gleichbleibenden Randbedingungen eröffnet die Chance, um die Kenntnis der genauen Randbedingungen herumzukommen.

Die mittlere Größe ($= \sqrt[3]{\text{Gewicht}}$) irdischer Lebewesen bewegt sich zwischen 10^{-6} cm (Virus) und $3 \cdot 10^4$ cm (Wal). Werte, die über Zehnerpotenzen laufen, bedürfen logarithmischer Skalen. Biologen studieren deshalb die Allometriegesetze in doppelt logarithmischen Auftragungen. Berühmt ist das „Maus-Elefanten-Diagramm“, das den energetischen Grundumsatz (Sauerstoffverbrauch) von der Maus bis zum Elefanten als Funktion des Gewichts darstellt. Die Tatsache, dass hier ein $3/4$ -Potenzgesetz (das sogenannte KLEIBERSche Gesetz) und nicht ein $2/3$ -Potenzgesetz gilt, ist heiß diskutiert worden. Denn die plausible Annahme wäre, dass sich der Sauerstoffdurchsatz proportional zur Oberfläche eines Volumens ändert, was zu einem $2/3$ -Gesetz führen würde. Ich würde mich dagegen wundern, wenn die evolutive Optimierung gerade zu dem Potenzgesetz geführt hätte, das für eine isometrische Proportionen-Änderung gilt. Ich setze auf den Optimierungscharakter der Evolution und gebrauche den Ausdruck Beltistometrie, wenn eine Allometrie nachweislich auf die Optimalauslegung der verschiedenen großen Lebewesen zurückzuführen ist.

Eine biologische Science-Fiction-Geschichte

Wir schreiben das Jahr 2098. Astronauten haben sich auf den Weg zum 5,9 Lichtjahre entfernten BARNARDS Pfeilstern im Sternbild *Ophiuchus* (Schlangenträger) gemacht. Die Expedition landet auf einem Planeten des Systems. Dort hat sich metallenes Leben entwickelt. Eine dominierende Art der außerirdischen Lebewesen sind die *Halslinge*. Ihr extrem langer Hals wird aus Magnesium, dem leichtesten aller Metalle, gebildet. Demgegenüber besteht der kugelförmige Kopf der Halslinge aus Osmium, dem schwersten aller Metalle (**Bild 7-1**).

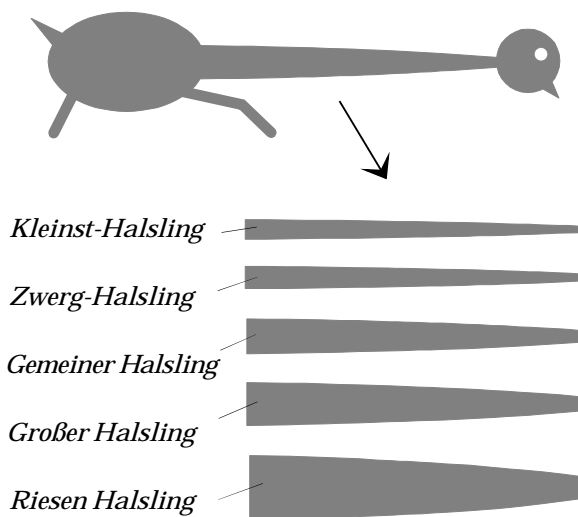


Bild 7-1

*Halsling-Spezies
auf BARNARDS
Pfeilstern-
Planeten*

Das Biologen-Team der Expedition untersucht nun nach allen Regeln der irdischen Kunst die Arten der Halslinge. Hier die Ergebnisse der Vermessung der verschiedenen Halsling-Spezies:

	Halslänge	Halsgewicht	Kopfgewicht
Kleinst-Halsling	0,30 m	0,040 kg	2,542 kg
Zwerg-Halsling	1,0 m	2,702 kg	94,17 kg
Gemeiner Halsling	5,0 m	755,3 kg	11770 kg
Großer Halsling	12,0 m	16180 kg	162700 kg
Riesen-Halsling	60,0 m	4522000 kg	20340000 kg

Die doppelt logarithmische Auftragung zeigt: Zwischen Kopf- und Halsgewicht besteht ein funktionaler Zusammenhang der Form:

$$\text{Halsgewicht} \sim (\text{Kopfgewicht})^{7/6}$$

Unsere Zukunfts-Biologen erinnern sich: Es ist derselbe funktionale Zusammenhang, der im 20sten Jahrhundert von Biologen bei Erd-Wirbeltieren entdeckt und als Allometriegesetz bezeichnet wurde:

	Körpergewicht	Skelettgewicht	Lastgewicht
Maus	0,020 kg	0,001066 kg	0,0189 kg
Ratte	0,205 kg	0,0129 kg	0,192 kg
Kaninchen	2,021 kg	0,181 kg	1,840 kg
Katze	2,931 kg	0,342 kg	2,589 kg
Hund	20,00 kg	4,120 kg	15,88 kg
Mensch	67,31 kg	12,161 kg	55,15 kg
Elefant	6600 kg	1782 kg	4818 kg

Die doppelt logarithmische Auftragung dieser klassischen Daten wird durch die Gesetzmäßigkeit

$$\text{Skelettgewicht} \sim (\text{Lastgewicht})^{7/6}$$

widergegeben. Lastgewicht ist das Gesamtgewicht minus dem Skelettgewicht des Lebewesens. In der grafischen Darstellung (**Bild 7-1**) überrascht, mit welcher Genauigkeit das $7/6$ -Potenzgesetz bei Halslingen und Wirbeltieren erfüllt wird.

Die Lösung des Rätsels lautet: Die Halslinge sind in Wahrheit einseitig eingespannte Biegeträger, die auf dem Computer mittels der Evolutionsstrategie gewichtsminimiert wurden, und zwar unter der Nebenbedingung gleichbleibender relativer Durchbiegung f/l . Am Ende des Biegeträgers hängt eine Lastkugel, deren Durchmesser proportional mit der Trägerlänge wächst. Selbstverständlich lässt sich das Minimierungsproblem auch analytisch behandeln: Lösung ist eine Form, die in der Statik als Träger gleicher Festigkeit bekannt ist. Die Volumenberechnung von Trägern gleicher Festigkeit zeigt, dass unter der gegebenen Bedingung das Trägergewicht mit der Last hoch $7/6$ wächst.

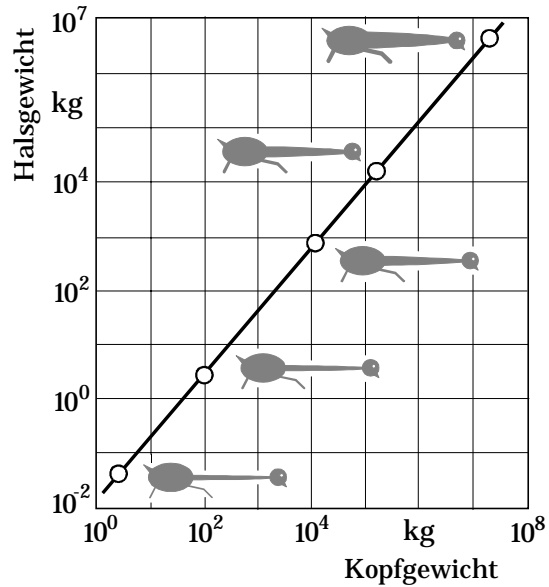


Bild 7-2:

Beltistometriegesetz für Halslinge auf BARNARDS-Pfeilstern-Planeten.

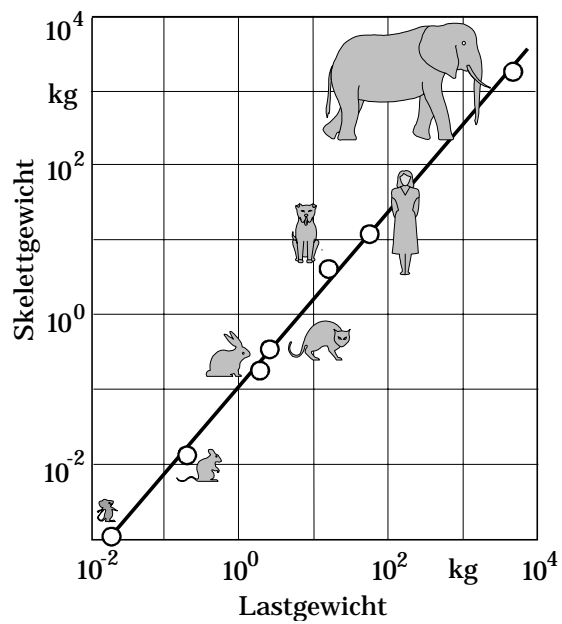


Bild 7-3:

Beltistometriegesetz für Wirbeltiere auf dem Sonnenplaneten Erde.

Die Kombination „Magnesium für den Hals und Osmium für den Kopf“ habe ich erfunden, um eine geometrisch reale Optimierung vorzunehmen. Der lange Hals sei lebensnotwendig für Halslinge. Ihr Osmi-

umkopf bildet eine gewaltige Last, die von dem langen Magnesium-Hals getragen werden muss. Und Magnesium sei knapp auf BARNARDS Pfeilstern-Planeten. Deshalb wurde mittels der Evolutionsstrategie das Halsgewicht der Halslinge minimiert. Auf unserem Sonnen-Planeten wurde offenbar analog das Skelettgewicht der Wirbeltiere minimiert. Hier ist die natürliche Evolution die Optimierungsmethode.

Ich möchte das Science-Fiction-Märchen ausweiten. Auf BARNARDS Pfeilsternplaneten gebe es noch die Hüpflinge. Wiederum ist es ein schwerer kugeliger Kopf, der von einem Stab getragen wird. Der Stab sei diesmal das Bein, mit dem sich der Hüpfling über die Planetenoberfläche springend fortbewegt. Dabei belastet der schwere Kopf das Bein auf Knickung. Wie müssen die verschiedenen Hüpflingsarten (vom Kleinst-Hüpfling bis zum Riesen-Hüpfling) ausgelegt werden, damit ihr Bein nicht knickt. Da die Knicklast proportional mit der dritten Potenz der Größe wächst, die Spannung im Bein aber über die Querschnittsfläche geleitet wird, führt die geometrisch ähnliche Konstruktion in die Klemme. Isometrie als Lösung ist nicht zu erwarten. Wir rechnen das System statisch durch:

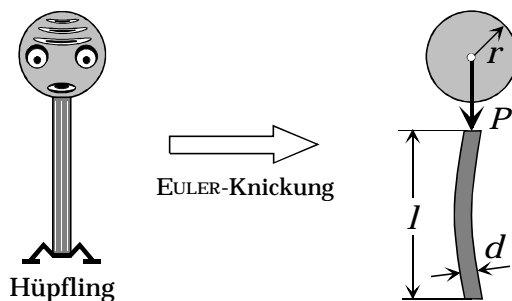


Bild 7-4:

Belastung des Beins eines Hüpflings

Das Bein, ein kreiszylindrischer Stab, knickt nach der EULER-schen Knickformel bei der Last P_{Euler} . Und die Größe dieser Last möge gleich dem Gewicht des kugeligen Kopfes sein:

$$\text{Aus } P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 l^2} \quad \& \quad P_{\text{Euler}} = P_{\text{Kopf}} = g \rho_{\text{Kopf}} V_{\text{Kopf}} \quad \Rightarrow \quad V_{\text{Kopf}} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 l^2 g \rho_{\text{Kopf}}}.$$

Es kommen die 3 Gleichungen hinzu:

$$V_{\text{Kopf}} = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V_{\text{Bein}} = \frac{\pi}{4} d^2 l, \quad r = \gamma l .$$

Hingewiesen sei auf die letzte Beziehung, die besagt, dass der Radius der Kopfkugel mit dem Maßstabsfaktor γ mitwächst, wenn sich l vergrößert. Aus den 4 Gleichungen lassen sich die drei Größen l , d und r eliminieren. Die verbleibende Gleichung lässt sich in die Form bringen:

$$V_{\text{Bein}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{g\rho_{\text{Kopf}}}{\gamma^4 E} \right)^{1/2} \cdot (V_{\text{Kopf}})^{7/6} .$$

In Worten: Bei Vergrößerung der Hüpflinge wächst das Bein-gewicht proportional mit dem Kopfgewicht (= Lastgewicht) hoch 7/6. Die gleiche Potenz-Abhängigkeit erhält man analytisch für die Halslinge, die nicht auf Knickung, sondern auf gleiche relative Durchbiegung (= Steifigkeit) ihres Halses ausgelegt werden. — Erfreulich, wenn zwei unterschiedliche Zielfunktionen zur gleichen Lösung führen. Es gibt noch einen solchen Fall. Ich habe auf meinen Exkursionen an vielen Bäumen und Sträuchern die Durchmesser vor und nach ihren Verzweigungen gemessen. Es ergibt sich – wie bei den Blutgefäßen – ein $\sqrt[3]{1/z}$ -Gesetz. Diese Gesetzmäßigkeit lässt sich auf zweifache Weise erklären. Entweder die Saftströme sollen, wie der Blutstrom, minimale Strömungsverluste aufweisen. Oder es gilt das Festigkeitskriterium, dass das Widerstandsmoment nach der Verzweigung beibehalten wird. Beides könnte zutreffen. Dann ist zu erwarten, dass die biologische Evolution unter doppeltem Zwang steht, die Optimallösung anzusteuern. Wenn Biegungs- und Knickungs-Optimierung zur gleichen Lösung führen, verwundert die Gültigkeit des 7/6-Potenzgesetz beim Maus-Elefanten-Diagramm nicht mehr so sehr.

Energieumsatz und Größe

Ich habe dem Buch „Form und Leben“ von THOMAS A. MCMAHON und JOHN TYLER BONNER die Leistungsdaten von 24 Verbrennungsmotoren – vom Modellflugmotor bis zum schweren Schiffsdiesel – entnommen (siehe ***Tabelle 7-1***).

Tabelle 7-1: Motoren auf dem Prüfstand, vom Modellflug- zum Schiffsdiesel

Motor	Hubraum ℓ	Drehzahl U/min	Gewicht G kg	Durchsatz \dot{V} ℓ/s
Webra Speedy	0,0018	22000	0,135	0,66
Motori Cipolla	0,0025	26000	0,15	1,08
Webra Speed 20	0,0034	22000	0,25	1,25
Webra 40	0,0065	15500	0,27	1,68
Webra 61 Blackhead	0,01	14000	0,43	2,33
Webra 61 WR	0,01	19000	0,49	3,17
Enya 60-4C	0,01	11800	0,61	1,97
Webra 91 RC	0,0143	13000	0,67	3,10
Technopower radial	0,020	8700	0,913	2,90
Kavan FK 50	0,05	8000	2,45	6,67
Mc Culloch M2-10	0,055	11000	3,5	10,1
Honda 450	0,45	8500	34	57,4
KFM 104	0,916	3900	68	59,5
Lycoming 0-145-A	2,37	2550	75	101
Continental A 65	2,8	2300	79	107
Franklin 4AC-176	2,8	2500	82	117
Franklin 6AC-296	4,7	2600	118	204
Continental C115	3,0	2350	119	118
Continental C140	3,0	3000	135	150
Lycoming GO-290A	4,75	3000	150	238
Ranger 6-440C	7,2	2450	171	294
Lycoming GO-435B	7,1	3000	182	355
Jacobs R-775	12,4	2000	229	413
Chrysler 340	5,57	5000	245	464
Ranger SGV-770C	12,6	3000	331	630
Allison V-1710	28,0	2600	735	1213
Wright GR-2600	42,7	2300	885	1637
Allison V-3420	56,0	2600	1180	2427
Daimler-Benz 609	61,8	2800	1400	2884
GMC Electromatic	183	9000	1775	2745
Nordberg	488	400	5260	3253
Ingersoll-Rand PKVT	1165	360	10850	6990
Faibanks Morse	1327	400	12860	8847
Cooper-Bessemer V-	1334	330	13500	7337
Sultzer RD-90	11850	119	97200	23503
Burmeister & Wain	11900	110	102300	21817

Am Gasdurchsatz lässt sich die Leistung eines Motors erkennen. Das gilt so auch für Lebewesen. Für 14 wildlebende Säugetierarten – von der Zwergmaus bis zur Elen-Antilope – wurde die maximale Umsatzrate für den Sauerstoffverbrauch gemessen (**Tabelle 7-2**). Es galt, wie es bei den Verbrennungsmotoren selbstverständlich ist, die Tiere nicht im Leerlauf - also nicht ihren Ruheumsatz - zu vermessen. Sie wurden deshalb in einem Laufrad bzw. auf einem Laufband in Trab gehalten.

Tabelle 6-2: Tiere auf dem Prüfstand, von der Zwergmaus zur Elen-Antilope

Säugetier	Körpergewicht G kg	O ₂ -Umsatz \dot{V} ml/s
Zwergmaus	0,0072	0,0314
Eichhörnchen	0,0902	0,358
Zwergmungo	0,583	1,24
Zebramungo	1,151	2,33
Rattenkänguruh	1,10	3,24
Ginsterkatze	1,460	2,58
Suniböckchen	3,500	5,62
Springhase	3,00	4,85
Antilope	4,354	3,95
Gazelle	11,2	10,0
Löwenjunges	30	30
Weißschwanzgnu	98,0	72,6
Wasserbock	114	89,8
Elen-Antilope	217	131

Die grafischen Darstellungen der Daten (**Bild 7-6** und **Bild 7-7**) zeigen: Es gibt eine erstaunliche Parallele zwischen Technik und Biologie. Beide Male gilt ein 4/5-Potenzgesetz. Ich vermute, dass sich hinter der 4/5-Potenz Beltistometrie verbirgt. Ja ich würde so weit gehen und behaupten, dass ein Motor nicht richtig konstruiert wurde, wenn er nicht auf dieser doppeltlogarithmischen Geraden liegt. Beltistometrie-Diagramme könnten für den Ingenieur ein wertvolles Hilfsmittel werden, um seine Konstruktion zu bewerten. Und an Hand einer Beltistometrie lassen sich die Leistungen noch nicht gebauter zukünftiger Motoren voraussagen.

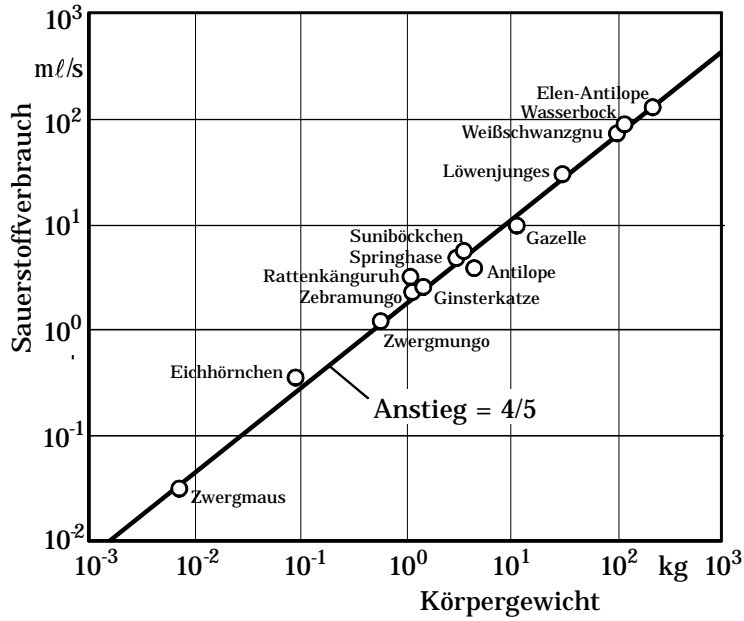


Bild 7-5:

Energieumsatz in der Natur.

Von der Zwergmaus zur Elen-Antilope.

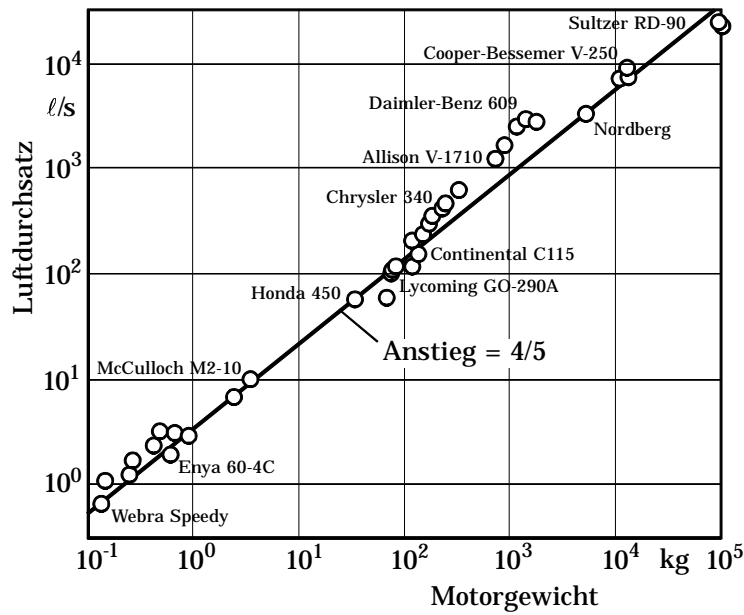


Bild 7-6:

Energieumsatz in der Technik.

Vom Modellflugmotor zum Schiffsdiesel.